Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2018 года

1. Какое из чисел $\frac{55}{21}$ и $\frac{95}{28}$ ближе к 3?

2. Найдите все значения параметра a, при которых разность между корнями уравнения $x^2 + 5ax + a^4 = 0$ максимальна.

3. Решите уравнение $\sin 7x \cos 11x = \sin x \cos 5x$.

4. Решите неравенство $\left(\sqrt{5}+2\right)^{\log_{\sqrt{5}-2} x} \geqslant \left(\sqrt{5}-2\right)^{\log_x \left(\sqrt{5}+2\right)}$.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть M — середина отрезка AD, а N — произвольная точка отрезка BC. Пусть K — пересечение отрезков CM и DN, а L — пересечение отрезков MN и AC. Найдите все возможные значения площади треугольника DMK, если известно, что $AD : BC = 4 : 3$, а площадь треугольника ABL равна 3.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} ax^2 + 2ax + 8y + 3a - 36 \geqslant 0 \\ ay^2 - 8ay + 8x + 18a + 4 \geqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. На рёбрах AB, BC, CD, DA нижнего основания отмечены соответственно точки K, L, M, N, таким образом, что $AK : KB = 4 : 5$, $BL : LC = 3 : 1$, $CM : MD = 7 : 2$, $DN : NA = 3 : 1$. Пусть P, Q, R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$, соответственно. Найдите PQ, если известно, что $QR = 1$ и $AB : BC = 3 : 2$.

8. Найдите все пары чисел x, y из промежутка $(0, \frac{\pi}{2})$, при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{3}\sin y}{\sqrt{2}\sin(x+y)} + 1\right)\left(\frac{\sqrt{2}\sin x}{3\sin y} + 1\right)^2\left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{3}\sin x} + 1\right)^4$$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2018 года

1. Какое из чисел $\dfrac{49}{18}$ и $\dfrac{79}{24}$ ближе к 3?

2. Найдите все значения параметра a, при которых разность между корнями уравнения $x^2+3ax+a^4=0$ максимальна.

3. Решите уравнение $\sin 4x\cos 10x=\sin x\cos 7x$.

4. Решите неравенство $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} x}\geqslant\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\log_x\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть M — середина отрезка AD, а N — произвольная точка отрезка BC. Пусть K — пересечение отрезков CM и DN, а L — пересечение отрезков MN и AC. Найдите все возможные значения площади треугольника DMK, если известно, что $AD:BC=3:2$, а площадь треугольника ABL равна 4.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases}ax^2+4ax-8y+6a+28\leqslant 0\\ ay^2-6ay-8x+11a-12\leqslant 0\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. На рёбрах AB, BC, CD, DA нижнего основания отмечены соответственно точки K, L, M, N, таким образом, что $AK:KB=4:5$, $BL:LC=3:1$, $CM:MD=7:2$, $DN:NA=3:1$. Пусть P, Q, R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$, соответственно. Найдите PQ, если известно, что $QR=1$ и $AB:BC=3:2$.

8. Найдите все пары чисел x,y из промежутка $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{3}\sin y}{\sqrt{2}\sin(x+y)}+1\right)\left(\frac{\sqrt{2}\sin x}{3\sin y}+1\right)^2\left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{3}\sin x}+1\right)^4$$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2018 года

1. Какое из чисел $\dfrac{49}{32}$ и $\dfrac{59}{24}$ ближе к 2?

2. Найдите все значения параметра p, при которых разность между корнями уравнения $x^2+px+3p^4=0$ максимальна.

3. Решите уравнение $\cos 10x\cos 7x=\cos 4x\cos x$.

4. Решите неравенство $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\log_{2-\sqrt{3}} x} \geqslant \left(2-\sqrt{3}\right)^{\log_x \left(2+\sqrt{3}\right)}$.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть M — середина отрезка AD, а N — произвольная точка отрезка BC. Пусть K — пересечение отрезков CM и DN, а L — пересечение отрезков MN и AC. Найдите все возможные значения площади треугольника ABL, если известно, что $AD:BC=5:2$, а площадь треугольника DMK равна 5.

6. Найдите все значения параметра p, при которых система

$$\begin{cases} px^2+6px-12y+11p+18\leqslant 0\\ py^2-2py-12x+3p-30\leqslant 0\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. На рёбрах AB, BC, CD, DA нижнего основания отмечены соответственно точки K, L, M, N, таким образом, что $AK:KB=7:9$, $BL:LC=2:1$, $CM:MD=3:1$, $DN:NA=2:1$. Пусть P, Q, R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$, соответственно. Найдите PQ, если известно, что $QR=1$ и $AB:BC=4:3$.

8. Найдите все пары чисел x,y из промежутка $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{5}\cos y}{2\sin(x+y)}+1\right)\left(\frac{2\cos x}{3\cos y}+1\right)^2\left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{5}\cos x}+1\right)^4$$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2018 года

1. Какое из чисел $\dfrac{53}{36}$ и $\dfrac{68}{27}$ ближе к 2?

2. Найдите все значения параметра p, при которых разность между корнями уравнения $x^2+px+5p^4=0$ максимальна.

3. Решите уравнение $\cos 12x\cos 5x=\cos 8x\cos x$.

4. Решите неравенство $\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^{\log_{\sqrt{6}-\sqrt{5}}x}\geqslant\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^{\log_x\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)}$.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть M — середина отрезка AD, а N — произвольная точка отрезка BC. Пусть K — пересечение отрезков CM и DN, а L — пересечение отрезков MN и AC. Найдите все возможные значения площади треугольника ABL, если известно, что $AD:BC=5:2$, а площадь треугольника DMK равна 5.

6. Найдите все значения параметра p, при которых система

$$\begin{cases}px^2+6px-12y+11p+18\leqslant 0\\ py^2-2py-12x+3p-30\leqslant 0\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. На рёбрах AB, BC, CD, DA нижнего основания отмечены соответственно точки K, L, M, N, таким образом, что $AK:KB=7:9$, $BL:LC=2:1$, $CM:MD=3:1$, $DN:NA=2:1$. Пусть P, Q, R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$, соответственно. Найдите PQ, если известно, что $QR=1$ и $AB:BC=4:3$.

8. Найдите все пары чисел x,y из промежутка $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{5}\cos y}{2\sin(x+y)}+1\right)\left(\frac{2\cos x}{3\cos y}+1\right)^2\left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{5}\cos x}+1\right)^4$$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2018 года

1. Какое из чисел $\frac{49}{18}$ и $\frac{79}{24}$ ближе к 3?

2. Найдите все значения параметра a, при которых разность между корнями уравнения $x^2 + 3ax + a^4 = 0$ максимальна.

3. Решите уравнение $\sin 4x \cos 10x = \sin x \cos 7x$.

4. Решите неравенство $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} x} \geqslant \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\log_x \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть M — середина отрезка AD, а N — произвольная точка отрезка BC. Пусть K — пересечение отрезков CM и DN, а L — пересечение отрезков MN и AC. Найдите все возможные значения площади треугольника DMK, если известно, что $AD : BC = 3 : 2$, а площадь треугольника ABL равна 4.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - 8y + 6a + 28 \leqslant 0 \\ ay^2 - 6ay - 8x + 11a - 12 \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. На рёбрах AB, BC, CD, DA нижнего основания отмечены соответственно точки K, L, M, N, таким образом, что $AK : KB = 5 : 4$, $BL : LC = CM : MD = 2 : 1$, $DN : NA = 5 : 1$. Пусть P, Q, R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$, соответственно. Найдите QR, если известно, что $PQ = 1$ и $AB : BC = 3 : 2$.

8. Найдите все пары чисел x, y из промежутка $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{6}\sin y}{\sqrt{5}\sin(x+y)} + 1\right)\left(\frac{\sqrt{5}\sin x}{3\sin y} + 1\right)^2\left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{6}\sin x} + 1\right)^4$$