Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2016 года

1. Найдите $f\left(\frac{2}{7}\right)$, если $f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{3}{7}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2 + ax - 6 = 0$ равна 5. Найдите все возможные значения a.

3. Решите уравнение $2\cos^2 x + 3\sin 2x = 4 + 3\cos 2x$.

4. Решите неравенство $\log_{1-\log_3 x}(1 + \log_x^2 3) \leqslant 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке S. Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке T. Прямая ST пересекает внешнюю окружность в точках S и C. Найдите площадь четырёхугольника $SACB$, если известно, что $CA = 5$, $CB \| AS$, а радиусы окружностей относятся как $11:16$.

6. Ровно в 11:00 из пункта А в пункт Б выехал велосипедист. Проехав две пятых пути, наблюдательный велосипедист заметил, что мимо него в сторону пункта А прошёл некий пешеход. В тот самый момент, когда велосипедист прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал мотоциклист. Когда до пункта А оставалось две седьмых пути, не менее наблюдательный мотоциклист заметил, что он поравнялся с тем самым пешеходом. Во сколько придёт пешеход в пункт А, если известно, что мотоциклист прибыл в пункт А ровно в 12:00? Скорости пешехода, велосипедиста и мотоциклиста считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 20. Плоскость π параллельна ребру BC, перпендикулярна плоскости EFS и пересекает ребро CD в точке K, так что $CK : KD = 2 : 3$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости CDS и ABS, параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани DES.

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{157 + \log_a^2 \cos\frac{x}{a} - \log_a \cos^{12}\frac{x}{a}} + \sqrt{29 + \log_a^2 \sin\frac{x}{a} + \log_a \sin^4\frac{x}{a}} + \sqrt{47 + \log_a^2 \operatorname{tg}\frac{x}{a} - \log_a \operatorname{tg}^6\frac{x}{a}}$$

и все пары (a, x), при которых оно достигается.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2016 года

1. Найдите $f\left(\dfrac{7}{3}\right)$, если $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{5}{3}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+ax-10=0$ равна 7. Найдите все возможные значения a.

3. Решите уравнение $8\cos^2 x+\sin 2x=3+2\cos 2x$.

4. Решите неравенство $\log_{1-\log_x 2}(1+\log_2^2 x)\leqslant 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке P. Хорда QR внешней окружности касается внутренней окружности в точке S. Прямая PS пересекает внешнюю окружность в точках P и T. Найдите QT, если известно, что $PQ\|RT$, площадь четырёхугольника $PQTR$ равна $5\sqrt{5}$, а радиусы окружностей относятся как $7:10$.

6. Ровно в 13:00 из пункта А в пункт Б выехал мотоциклист. Проехав четверть пути, наблюдательный мотоциклист заметил, что мимо него в сторону пункта А прошёл некий пешеход. В тот самый момент, когда мотоциклист прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автомобиль. Когда до пункта А оставалось пятая часть пути, не менее наблюдательный водитель автомобиля заметил, что он поравнялся с тем самым пешеходом. Во сколько приехал автомобиль в пункт А, если известно, что пешеход прибыл в пункт А ровно в 17:00? Скорости пешехода, мотоцикла и автомобиля считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вершиной V лежит шестиугольник $KLMNOP$ со стороной 10. Плоскость π параллельна ребру LM, перпендикулярна плоскости OPV и пересекает ребро MN в точке T, так что $MT:TN=1:4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскость MNV и плоскость основания, перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани NOV.

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{65+\log_a^2\cos ax-\log_a\cos^8 ax}+\sqrt{10+\log_a^2\sin ax+\log_a\sin^2 ax}+\sqrt{125+\log_a^2\operatorname{tg} ax-\log_a\operatorname{tg}^{10} ax}$$

и все пары (a,x), при которых оно достигается.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2016 года

1. Найдите $f\left(\dfrac{5}{3}\right)$, если $f(x) = \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{4}{9}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2 + ax + 10 = 0$ равна 3. Найдите все возможные значения a.

3. Решите уравнение $8\cos^2 x + \sin 2x = 3 + 2\cos 2x$.

4. Решите неравенство $\log_{1-\log_x 2}(1 + \log_2^2 x) \leqslant 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Хорда BC внешней окружности касается внутренней окружности в точке D. Прямая AD пересекает внешнюю окружность в точках A и E. Найдите BE, если известно, что $EC = CA$, площадь четырёхугольника $ABEC$ равна $3\sqrt{3}$, а радиусы окружностей относятся как $2:3$.

6. Ровно в 10:00 из пункта А в пункт Б выехала маршрутка. Проехав треть пути, наблюдательный водитель маршрутки заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда маршрутка прибыла в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал грузовик. Когда до пункта А оставалось шестая часть пути, не менее наблюдательный водитель грузовика заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приехал грузовик в пункт А, если известно, что велосипедист прибыл в пункт А ровно в 15:00? Скорости велосипедиста, маршрутки и грузовика считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вершиной V лежит шестиугольник $KLMNOP$ со стороной 5. Плоскость π параллельна ребру KL, перпендикулярна плоскости NOV и пересекает ребро LM в точке T, так что $LT : TM = 3 : 2$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскость LMV и плоскость основания, перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани MNV.

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{13 + \log_a^2 \cos\frac{x}{a} + \log_a \cos^4\frac{x}{a}} + \sqrt{97 + \log_a^2 \sin\frac{x}{a} - \log_a \sin^8\frac{x}{a}} + \sqrt{20 + \log_a^2 \operatorname{tg}\frac{x}{a} + \log_a \operatorname{tg}^4\frac{x}{a}}$$

и все пары (a, x), при которых оно достигается.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2016 года

1. Найдите $f\left(\frac{3}{5}\right)$, если $f(x)=\frac{x}{1-x}-\frac{5}{7}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+ax+6=0$ равна 1. Найдите все возможные значения a.

3. Решите уравнение $6\cos^2 x+3\cos 2x=5\sin 2x-2$.

4. Решите неравенство $\log_{1+\log_5 x}(1+\log_x^2 5)\leqslant 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке S. Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке T. Прямая ST пересекает внешнюю окружность в точках S и C. Найдите площадь четырёхугольника $SACB$, если известно, что $CA=5$, $CB\|AS$, а радиусы окружностей относятся как $11:16$.

6. Ровно в 11:00 из пункта А в пункт Б выехал велосипедист. Проехав две пятых пути, наблюдательный велосипедист заметил, что мимо него в сторону пункта А прошёл некий пешеход. В тот самый момент, когда велосипедист прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал мотоциклист. Когда до пункта А оставалось две седьмых пути, не менее наблюдательный мотоциклист заметил, что он поравнялся с тем самым пешеходом. Во сколько придёт пешеход в пункт А, если известно, что мотоциклист прибыл в пункт А ровно в 12:00? Скорости пешехода, велосипедиста и мотоциклиста считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 14. Плоскость π параллельна ребру AB, перпендикулярна плоскости DES и пересекает ребро BC в точке K, так что $BK:KC=3:4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости BCS и AFS, параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани CDS.

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{106+\log_a^2\cos ax+\log_a\cos^{10} ax}+\sqrt{58+\log_a^2\sin ax-\log_a\sin^6 ax}+\sqrt{5+\log_a^2\operatorname{tg} ax+\log_a\operatorname{tg}^2 ax}$$

и все пары (a,x), при которых оно достигается.

й Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

полнительное вступительное испытание по математике

июль 2016 года

1. Найдите $f\left(\dfrac{7}{3}\right)$, если $f(x) = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{5}{3}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2 + ax - 10 = 0$ равна 7. Найдите все возможные значения a.

3. Решите уравнение $8\cos^2 x + \sin 2x = 3 + 2\cos 2x$.

4. Решите неравенство $\log_{1-\log_x 2}(1 + \log_2^2 x) \leqslant 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Хорда BC внешней окружности касается внутренней окружности в точке D. Прямая AD пересекает внешнюю окружность в точках A и E. Найдите BE, если известно, что $EC = CA$, площадь четырёхугольника $ABEC$ равна $3\sqrt{3}$, а радиусы окружностей относятся как $2:3$.

6. Ровно в 10:00 из пункта А в пункт Б выехала маршрутка. Проехав треть пути, наблюдательный водитель маршрутки заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда маршрутка прибыла в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал грузовик. Когда до пункта А оставалось шестая часть пути, не менее наблюдательный водитель грузовика заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приехал грузовик в пункт А, если известно, что велосипедист прибыл в пункт А ровно в 15:00? Скорости велосипедиста, маршрутки и грузовика считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вершиной V лежит шестиугольник $KLMNOP$ со стороной 5. Плоскость π параллельна ребру KL, перпендикулярна плоскости NOV и пересекает ребро LM в точке T, так что $LT : TM = 3 : 2$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскость LMV и плоскость основания, перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани MNV.

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{13 + \log_a^2 \cos\frac{x}{a} + \log_a \cos^4\frac{x}{a}} + \sqrt{97 + \log_a^2 \sin\frac{x}{a} - \log_a \sin^8\frac{x}{a}} + \sqrt{20 + \log_a^2 \operatorname{tg}\frac{x}{a} + \log_a \operatorname{tg}^4\frac{x}{a}}$$

и все пары (a, x), при которых оно достигается.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2016 года

1. Найдите $f\left(\frac{3}{5}\right)$, если $f(x) = \frac{x}{1-x} - \frac{5}{7}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2 + ax + 6 = 0$ равна 1. Найдите все возможные значения a.

3. Решите уравнение $2\cos^2 x + 3\sin 2x = 4 + 3\cos 2x$.

4. Решите неравенство $\log_{1-\log_3 x}(1 + \log_x^2 3) \leqslant 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке T. Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке S. Прямая TS пересекает внешнюю окружность в точках T и C. Найдите площадь четырёхугольника $TACB$, если известно, что $CB = BT = 3$, а радиусы окружностей относятся как $5:8$.

6. Ровно в 9:00 из пункта А в пункт Б выехал автомобиль. Проехав две третьих пути, наблюдательный водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автобус. Когда до пункта А оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт А, если известно, что автобус прибыл в пункт А ровно в 11:00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 14. Плоскость π параллельна ребру AB, перпендикулярна плоскости DES и пересекает ребро BC в точке K, так что $BK : KC = 3 : 4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости BCS и AFS, параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани CDS.

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{106 + \log_a^2 \cos ax + \log_a \cos^{10} ax} + \sqrt{58 + \log_a^2 \sin ax - \log_a \sin^6 ax} + \sqrt{5 + \log_a^2 \operatorname{tg} ax + \log_a \operatorname{tg}^2 ax}$$

и все пары (a, x), при которых оно достигается.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2016 года

1. Найдите $f\left(\frac{2}{7}\right)$, если $f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{3}{7}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2 + ax - 6 = 0$ равна 5. Найдите все возможные значения a.

3. Решите уравнение $2\cos^2 x + 3\sin 2x = 4 + 3\cos 2x$.

4. Решите неравенство $\log_{1-\log_3 x}(1 + \log_x^2 3) \leqslant 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке T. Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке S. Прямая TS пересекает внешнюю окружность в точках T и C. Найдите площадь четырёхугольника $TACB$, если известно, что $CB = BT = 3$, а радиусы окружностей относятся как $5:8$.

6. Ровно в 9:00 из пункта А в пункт Б выехал автомобиль. Проехав две третьих пути, наблюдательный водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автобус. Когда до пункта А оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт А, если известно, что автобус прибыл в пункт А ровно в 11:00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 20. Плоскость π параллельна ребру BC, перпендикулярна плоскости EFS и пересекает ребро CD в точке K, так что $CK : KD = 2 : 3$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости CDS и ABS, параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани DES.

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{157 + \log_a^2 \cos\frac{x}{a} - \log_a \cos^{12}\frac{x}{a}} + \sqrt{29 + \log_a^2 \sin\frac{x}{a} + \log_a \sin^4\frac{x}{a}} + \sqrt{47 + \log_a^2 \operatorname{tg}\frac{x}{a} - \log_a \operatorname{tg}^6\frac{x}{a}}$$

и все пары (a, x), при которых оно достигается.