

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2013 года

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 3. Один из его корней равен $4/3$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = -2$.

2. Вычислите $\log_{12} 3 \cdot \log_9 12$.

3. Решите неравенство

$$12\left(3 + 3^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(3^{1+2x} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \geq 4 \cdot 3^{\frac{x}{2}}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin 3x} + \frac{\cos x}{\cos 3x}.$$

5. В 14:00 из села Верхнее вниз по течению реки в сторону села Нижнее отправился катер "Быстрый". Когда до Нижнего оставалось плыть 500 метров, ему навстречу из Нижнего вышел катер "Смелый". В этот же самый момент "Быстрый", не желая встречи со "Смелым", развернулся и пошел обратно к Верхнему. В 14:14, когда расстояние по реке от "Быстрого" до Верхнего сравнялось с расстоянием по реке от "Смелого" до "Быстрого", на "Смелом" осознали, что они идут с "Быстрым" на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно к Нижнему. В исходные пункты катера вернулись одновременно в 14:18. Найдите расстояние по реке между Верхним и Нижним, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $KLMN$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r , причем $R = \frac{3}{2}r$. Найдите среднюю линию трапеции, если диагональ KM равна 3.

7. В основании прямой призмы $KLMK'L'M'$ лежит прямоугольный треугольник KLM , такой что $KM = LM = 1$. На ребре $K'L'$ верхнего основания (параллельном KL) отмечена точка N , так что $K'N : NL' = 1 : 3$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $KLM'N$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sin(x - a \ln|x|) = x + 1$$

имеет бесконечно много решений.

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2013 года

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен -2 . Один из его корней равен $3/2$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 1$.

2. Вычислите $\log_8 10 \cdot \log_{10} 4$.

3. Решите неравенство

$$9\left(1 + 5^{1-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(5^{2x} + 5\right)^{\frac{1}{2}} \geq 6^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\cos 4x}{\sin 3x} - \frac{\sin 4x}{\cos 3x} = \frac{\sin 3x}{\cos 4x} - \frac{\cos 3x}{\sin 4x}.$$

5. От биостанции до границы заповедника вверх по реке ровно 14 км. В 7:00 браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. Через некоторое время им навстречу с биостанции вышел катер рыбинспекции. Браконьеры тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. В 7:38, когда браконьеры оказались ровно посередине между рыбинспекторами и границей, рыбинспекторы осознали, что они идут с браконьерами на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно на биостанцию. До биостанции они добрались ровно в тот момент, когда браконьеры выехали за пределы заповедника — в 7:50. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры и рыбинспекторы, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r . Найдите r , если $R = 12$, а косинус угла между диагональю AC и основанием AD равен $3/4$.

7. В основании прямой призмы $KLMK'L'M'$ лежит прямоугольный треугольник KLM , такой что $KM = LM = 1$. На ребре $K'M'$ верхнего основания (параллельном KM) отмечена точка N , так что $K'N : NM' = 3 : 1$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $KL'MN$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\cos\left(x - \frac{a}{x}\right) = x - 1$$

имеет бесконечно много решений.

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2013 года

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен -2 . Один из его корней равен $3/2$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 1$.

2. Вычислите $\log_{16} 6 \cdot \log_6 8$.

3. Решите неравенство

$$9(1 + 5^{1-2x})^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(5^{2x} + 5)^{\frac{1}{2}} \geq 6^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\sin 2x} + \frac{\sin 3x}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 3x} + \frac{\cos 2x}{\sin 3x}.$$

5. От биостанции до границы заповедника вверх по реке ровно 14 км. В 7:00 браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. Через некоторое время им навстречу с биостанции вышел катер рыбинспекции. Браконьеры тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. В 7:38, когда браконьеры оказались ровно посередине между рыбинспекторами и границей, рыбинспекторы осознали, что они идут с браконьерами на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно на биостанцию. До биостанции они добрались ровно в тот момент, когда браконьеры выехали за пределы заповедника — в 7:50. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры и рыбинспекторы, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $KLMN$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r . Найдите r , если $R = 20$, а косинус угла между диагональю KM и основанием KN равен $4/5$.

7. В основании прямой призмы $KLMK'L'M'$ лежит прямоугольный треугольник KLM , такой что $KM = LM = 1$. На ребре $K'M'$ верхнего основания (параллельном KM) отмечена точка N , так что $K'N : NM' = 3 : 1$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $K'L'MN$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sin\left(x + \frac{a}{x}\right) = x + 1$$

имеет бесконечно много решений.

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2013 года

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен -3 . Один из его корней равен $7/3$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 4$.

2. Вычислите $\log_5 27 \cdot \log_9 5$.

3. Решите неравенство

$$15(4 + 4^{-2x})^{-\frac{1}{2}} - (4^{1+2x} + 1)^{\frac{1}{2}} \geq 20^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{x}{2}}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin 5x} - \frac{\cos x}{\cos 5x}.$$

5. В 15:00 из пункта А, двигаясь против течения реки в сторону пункта Б, вышел катер “Первый”, а навстречу ему из пункта Б отправился катер “Второй”. В 15:12 путь, пройденный “Вторым”, стал равен расстоянию между катерами. В этот момент “Первый” развернулся и пошел обратно к пункту А. “Второй” продолжал двигаться за “Первым” до тех пор, пока “Первый” не прибыл в пункт А. В этот момент расстояние от “Второго” до А равнялось 1,6 км. Развернувшись, “Второй” сразу же отправился обратно в пункт Б, куда и прибыл в 15:49. Чему равно расстояние по реке между пунктами А и Б?

6. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r , причем $R = 2r$. Найдите среднюю линию трапеции, если диагональ AC равна 4.

7. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC , такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'B'$ верхнего основания (параллельном AB) отмечена точка D , так что $A'D : DB' = 1 : 2$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $ABC'D$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\cos(x + a \ln|x|) = x - 1$$

имеет бесконечно много решений.

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2013 года

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 2. Один из его корней равен $5/2$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 3$.

2. Вычислите $\log_{16} 6 \cdot \log_6 8$.

3. Решите неравенство

$$\frac{9}{2} \left(1 + 2^{1-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(2^{2x} + 2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{x}{2}}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\sin 2x} + \frac{\sin 3x}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 3x} + \frac{\cos 2x}{\sin 3x}.$$

5. От биостанции до границы заповедника вниз по реке ровно 8 км. В 8:00 браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. В это же время им навстречу с биостанции вышел катер с рыбинспекторами. Через 6 минут, когда рыбинспекторы были ровно посередине между биостанцией и браконьерами, браконьеры заметили катер рыбинспекции, тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. Когда браконьеры достигли границы, рыбинспекторы с чувством выполненного долга развернулись и отправились обратно на биостанцию, куда прибыли в 08:25. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры от рыбинспекторов, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $KLMN$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r . Найдите r , если $R = 20$, а косинус угла между диагональю KM и основанием KN равен $4/5$.

7. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC , такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'C'$ верхнего основания (параллельном AC) отмечена точка D , так что $A'D : DC' = 2 : 1$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $AB'CD$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sin \left(x + \frac{a}{x}\right) = x + 1$$

имеет бесконечно много решений.

ВАРИАНТ P131.

1. Про квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ известно, что $b = 7$ и что $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3}$. Найдите $f\left(-\frac{1}{3}\right)$.

2. Вычислите $(\log_4 3)^{\frac{\log_4 3}{\log_2(\log_4 3)}}$.

3. Решите неравенство

$$(2x^2 - 2x + 1)^{x^2 - 2x} \leq 1.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} 2x - 2 \sin x}{\operatorname{tg} 2x + 2 \sin x} = 0.$$

5. Из села Покровское до села Успенское ведут две дороги: одна через деревню Ивановка, другая через деревню Павловка — обе длиной в 6 км. Иван и Павел отправились ровно в полдень из Покровского в Успенское, Иван — через Ивановку, Павел — через Павловку. Иван сразу сел на автобус, доехал до Ивановки, а оттуда пошел в Успенское пешком. Павел же пошел до Павловки пешком, дошел до нее в 12:30 — ровно в тот момент, когда Иван приехал в Успенское, тут же сел в Павловке на автобус и поехал в Успенское, куда приехал в 12:40. Найдите расстояние от Ивановки до Успенского, если известно, что Иван и Павел шли со скоростью 4 км/ч, а автобусы двигались с равными постоянными скоростями.

6. В треугольнике ABC проведены медианы AE и BD . Известно, что углы $\angle EAB$ и $\angle DBC$ равны, причем их косинусы равны $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найдите BC , если $AB = 1$.

7. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$|\ln(2(ax + 1) - (x^2 + a^2))| = 2x$$

имеет ровно одно решение.

8. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник ABC со стороной 1. На двух ребрах верхнего основания отмечены точки K и L , так что $KL \parallel AC$. Известно, что треугольник KMB , где M — середина ребра AC , является правильным. Найдите объем тетраэдра $KLMB$.