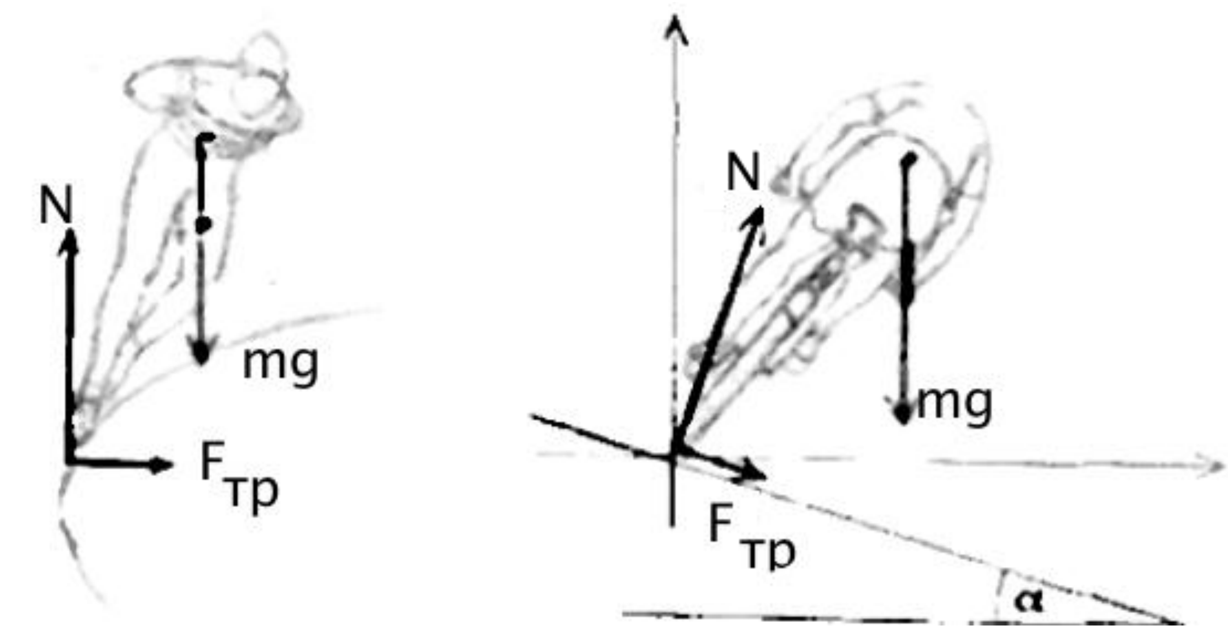
Решения задач заочной олимпиады ФББ 2014

9-й класс

5. Сравнить время, затрачиваемое на поворот велосипедистом и конькобежцем на поворот на треке. Трек велосипедиста находится под углом альфа к горизонту, а трек конькобежца строго горизонтален. Кому выгоднее проходить маршрут по внутренней бровке, а кому по внешней бровке трека?



Решение. Для конькобежца центростремительное ускорение возникает из-за силы трения $F_{тр} = kN$, где N – сила нормального давления конькобежца на лед. С другой стороны, $N = mg$. Поэтому $F_{тр} = kmg$ и

$$\frac{mV^2}{R} = kmg.$$

Делая поворот, конькобежец проходит расстояние πR. Время t, затраченное на поворот, равно

$$t = \pi\sqrt{\frac{R}{kg}}$$

Чем больше радиус окружности, тем больше время, затрачиваемое на поворот.

Велосипедисту центростремительное ускорение сообщает сумма горизонтальных составляющих силы трения и силы реакции опоры:

$$F_{\text{тр}}cos\alpha + Nsina = \frac{mV_1^2}{R}.$$

Для вертикальных составляющих:

$$Ncosa - Fsin\alpha - mg = 0.$$

Учитывая, что $F_{\text{тр}} = kN$ найдем максимальную скорость, с которой может двигаться велосипедист:

$$V_1 = \sqrt{gR\frac{k+tg\alpha}{1-k\,tg\alpha}}.$$

Заметьте, что эта скорость зависит не только от радиуса окружности, но и от угла наклона трека к горизонту.

Время, необходимое велосипедисту для того, чтобы пройти поворот радиуса R

$$t_1 = \frac{\pi R}{V_1} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}\frac{1-ktg\,\alpha}{k+tg\,\alpha}}.$$

Если велосипедист проходит поворот дальше от бровки, то меняется радиус поворота при фиксированном угле наклона трека. Благодаря этому уменьшается время прохождения поворота.

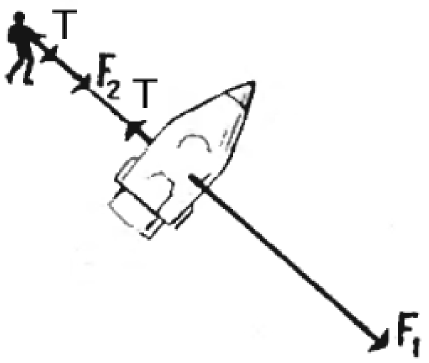
6. Предложите способ оценки скорости света в домашних условиях с использованием СВЧ-печи и подручных средств.

Решение. СВЧ печь генерирует электромагнитные волны сантиметрового диапазона. Отражаясь от металлической поверхности стенок СВЧ печи, эти волны складываются и порождают так называемые стоячие волны. Стоячие волны характеризуются наличием областей с высокой амплитудой колебания электромагнитного поля (так называемых «пучностей») и областей, в которых амплитуда колебаний минимальна (так называемые «узлы»). Пучности отстоят друг от друга на расстоянии половины длины волны $d = \lambda/2$. Если поместить в микроволновую печь объект, который при нагревании за счет микроволн будет немного расплавляться (или таять), то можно наблюдать области, в которых происходит более сильный разогрев – эти области соответствуют пучностям стоячих электромагнитных волн. В качестве такого объекта можно использовать плоский кусок льда или же плитку шоколадки.

При проведении такого эксперимента желательно исключить вращение или какое-либо движение объекта относительно микроволновой печки. Измерив расстояние между пучностями d можно оценить длину волны: $\lambda = 2d$. С другой стороны, длина волны связана со скоростью света с и с частотой электромагнитных колебаний следующей формулой: $\lambda = c/\nu$, откуда скорость света может быть выражена через расстояние d и частоту ν СВЧ печи (которая, как правило, указывается в инструкции по эксплуатации электроприборов). Получаем: $c = 2d\nu$. При частоте печки $\nu = 2{,}46$ ГГц и $d = 6$ см получается величина $c = 2{,}95 \cdot 10^8$ м/с , что довольно близко к справочному значению скорости света в вакууме, равному (приблизительно) $3 \cdot 10^8$ м/с.

10-й класс

5. Какое натяжение должен выдерживать трос, чтобы космонавт не улетел в открытый космос. Космонавт привязан к МКС, которая движется по круговой орбите вокруг Земли. Высота орбиты пренебрежимо мала по сравнению с радиусом Земли $R = 6400$ км. Масса космонавта 100 кг, Масса корабля 7 т, длина троса 33 м. МКС находится между и космонавтом и Землей как показано на рисунке.



Решение. На космический корабль действуют две силы, сила притяжения к Земле $F_1 = \gamma \frac{MM_з}{R_1^2}$ где М – масса корабля, а $M_З$– масса Земли, R_1– радиус орбиты корабля, γ – гравитационная постоянная, и сила натяжения троса Т (см рис.). Под действием этих сил корабль движется по окружности. Если угловая скорость движения корабля ω, то корабль движется с центростремительным ускорением $a_1 = \omega^2 R_1$, которое сообщает ему равнодействующая сил F_1 и Т. Согласно второму закону Ньютона

$F_1 - T = M\omega^2 R_1$, или

$$\gamma \frac{MM_з}{R_1^2} - T = M\omega^2 R_1 \qquad (1)$$

Рассмотрим силы, действующие на космонавта. Это силы натяжения троса и притяжения к Земле.

$F_2 = \gamma \frac{mM_з}{R_2^2}$,

где m – масса космонавта, а R_2– радиус его орбиты. Под действием этих сил космонавт движется по окружности радиуса R_2 с угловой скоростью ω, то есть с центростремительным ускорением $a_2 = \omega^2 R_2$. Так как обе силы, действующие на космонавта, направлены к центру Земли, то $F_2 + T = m\omega^2 R_2$, или

$\gamma \frac{mM_з}{R_2^2} + T = m\omega^2 R_2 \; .$ (2)

Исключая ω из уравнений (1) и (2), получим

$$\gamma \frac{MM_з}{R_1^2} - T \quad \frac{1}{MR_1} = \quad \gamma \frac{mM_з}{R_2^2} + T \quad \frac{1}{mR_2}$$

или

$$\gamma M_з \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_1^2 R_2^2} = T \frac{mR_1 + mR_2}{mM} \; . \qquad (3)$$

Но $R_2 \approx R_1 \approx R$, поэтому $R_1 R_2 \approx R^2$:

$$R_2^3 - R_1^3 = \quad R_2 - R_1 \quad R_2^2 + R_1^2 + R_1 R_2 \quad \approx 3lR^2,$$

где l – длина троса; $MR_1 + mR_2 = \quad m + M \; R$.

Это означает, что равенство (3) можно записать в виде

$$3\gamma \frac{M_з}{R^2} l = TR \frac{m + M}{mM}.$$

Отсюда получаем:

$$T = 3\gamma \frac{M_з}{R^2} \frac{l}{R} \frac{mM}{m + M}.$$

Если тело массы m находится на поверхности Земли, то на него действует сила тяжести

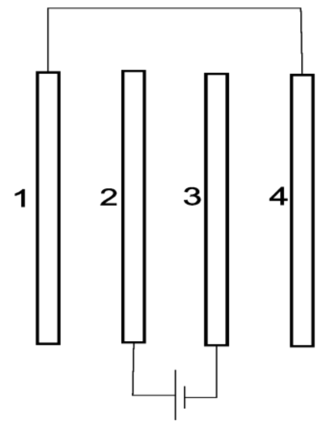
$$F = \gamma \frac{mM_з}{R^2} = mg.$$

Это означает, что ускорение свободного падения равно $\gamma \frac{M_з}{R^2}$. Поэтому мы можем выражение для силы натяжения троса переписать следующим образом:

$$T = 3 \frac{l}{R} \frac{mM}{m + M} g.$$

Ответ: $T = 3 \frac{l}{R} \frac{mM}{m+M} g \approx 0{,}02H.$

6. Четыре идентичные металлические пластины, площадью S каждая, расположены в вакууме на равных расстояниях d друг от друга (см. рисунок). Расстояние между пластинами намного меньше их характерных размеров. Крайние пластины (1 и 4) соединены между собой проводником, а средние (2 и 3) подключены к батарее с ЭДС = ξ. Найти электрические заряды всех пластин.



Решение. Обозначим величину заряда на первой пластине q, а на второй Q. Тогда на пластине 4 будет сосредоточен заряд $-q$, на пластине 3 заряд $-Q$ (что следует из закона сохранения электрического заряда и электронейтральности системы).

Поле в области между пластинами 2 и 3 складывается из поля, создаваемого пластинами 1 и 4 (оно равно $q/(S\cdot\varepsilon_0)$) и поля, создаваемого пластинами 2 и 3, которое равно $Q/(S\cdot\varepsilon_0)$.

Обозначим это поле E_{23}, тогда $E_{23} = q/(S\cdot\varepsilon_0) + Q/(S\cdot\varepsilon_0)$.

По определению разности потенциалов:

$\Delta\varphi_{23} = \xi = E_{23}\cdot\mathrm{d} = qd/(S\cdot\varepsilon_0) + Qd/(S\cdot\varepsilon_0)$.

Разность потенциалов между точками 1 и 4 равна $\Delta\varphi_{14} = \Delta\varphi_{12} + \Delta\varphi_{23} + \Delta\varphi_{34}$.

Эта разность потенциалов равна нулю, так как пластины 1 и 4 соединены – а значит, они обладают одинаковым потенциалом, то есть $\Delta\varphi_{14}=0$. С другой стороны, $\Delta\varphi_{12} + \Delta\varphi_{34} = 2qd/(S\cdot\varepsilon_0)$.

Поскольку $\Delta\varphi_{14}=0$, а $\Delta\varphi_{23} = \xi$, то $2qd/(S\cdot\varepsilon_0) = -\xi$.

Отсюда $q = -\xi S\varepsilon_0/(2\mathrm{d})$.

Так как $\xi = E_{23}\cdot d = qd/(S\varepsilon_0) + Qd/(S\varepsilon_0)$, то $Q = -3q = 3\xi S\varepsilon_0/(2d)$.

Ответ: $q = -\xi S\varepsilon_0/(2d)$, $Q = 3\xi S\varepsilon_0/(2d)$.