

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
*Факультет биоинженерии и биоинформатики*

**УТВЕРЖДАЮ**

Декан  
факультета биоинженерии  
и биоинформатики,  
академик

\_\_\_\_\_/В.П. Скулачев /

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Наименование дисциплины:**

Численные методы в задачах обработки данных

**Уровень высшего образования:**  
специалитет

**Направление подготовки (специальность):**

**06.05.01 Биоинженерия и биоинформатика**

Форма обучения:

**очная**

Рабочая программа рассмотрена и одобрена

*Ученым советом факультета*  
(протокол №\_\_\_\_, \_\_\_\_\_)

Москва 20\_\_

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по специальности 06.05.01 «Биоинженерия и биоинформатика» (программы специалитета) в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

Год (годы) приема на обучение – 2016, 2017, 2018, 2019.

## Цель и задачи дисциплины

**Цель дисциплины:** ознакомление студентов с основными численными методами, возникающими в задачах обработки экспериментальных данных.

**Задачи дисциплины:** освоение основ теории аппроксимации, метода наименьших квадратов, методов решения задач оптимизации, методов анализа периодических зависимостей.

1. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО: вариативная часть, профессиональный цикл, курс по выбору, курс IV – семестр 7.

2. Входные требования для освоения дисциплины, предварительные условия (если есть): освоение дисциплин «Математический анализ», «Линейная алгебра».

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине:

**Знать:** основные численные методы обработки экспериментальных данных, области их практического применения;

**Уметь:** формулировать и решать конкретные задачи на основе численных методов обработки экспериментальных данных, обобщать полученные результаты; получать экспериментальные данные, проводить их математическую обработку,

**Владеть:** навыками поиска необходимых данных в открытых источниках (в том числе, в информационных базах данных Python: пакеты SciPy, NumPy, Matplotlib, Pandas, Scikit-learn, Math; R: Wolfram, Excel, Origin) и применения их при решении практических задач

4. Формат обучения – лекционные занятия.

5. Объем дисциплины составляет 2 з.е., в том числе 28 академических часов, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 8 академических часа на самостоятельную работу обучающихся.

6. **Краткое содержание дисциплины (аннотация):**

Раздел 1. МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ

Тема 1. Полиномиальная аппроксимация.

Содержание темы: Постановки задачи. Нормы в пространстве функций на интервале I. Пространства  $C(I)$ ,  $L_1(I)$ ,  $L_2(I)$ ,  $W_s(M_s, I)$ . Теорема Вейерштрасса. Полином наилучшего приближения и оценки точности наилучшего приближения на классе  $W_s(M_s, I)$ .

Задания для самостоятельной работы: Полиномиальная аппроксимация.

Тема 2. Интерполяция.

Содержание темы: Постановки задачи. Интерполяционный полином Лагранжа. Оценки точности интерполяции и её зависимость от разбиения. Пример Рунге. Разбиение Чебышёва. Разделённые разности и интерполяционный полином Ньютона.

Задания для самостоятельной работы: Интерполяция.

Тема 3. Численное дифференцирование и интегрирование.

Содержание темы: Общая схема построения интерполяционных формул численного дифференцирования и интегрирования. Простейшие формулы численного дифференцирования и оценки их точности. Неустойчивость. Оптимальный выбор шага дискретизации при наличии шума. Простые и составные формулы численного интегрирования. Формулы трапеций и Симпсона, оценки их точности на классах  $W_s(H_s, I)$ .

Задания для самостоятельной работы: Численное дифференцирование и интегрирование.

Тема 4. Сплайны.

Содержание темы: Определение пространства сплайнов и его размерность. Виды сплайнов. Кубические сплайны дефекта один. Оценки точности приближения сплайнами. Сглаживание сплайнами и их вариационное определение.

Задания для самостоятельной работы: Сплайны.

## Раздел 2. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ (МНК)

### Тема 1. Поиск зависимостей и МНК.

Содержание темы: Общая задача поиска зависимостей по экспериментальным данным. МНК и оптимизация. Пример Менделеева. Постановка задачи в МНК и её решение. Нормальные уравнения и невязка.

Задания для самостоятельной работы: Поиск зависимостей и МНК.

### Тема 2. Методы решения линейных уравнений.

Содержание темы: Как решать 100 линейных уравнений с 5 неизвестными? Квазирешения. Дополнительные сведения из линейной алгебры. Матрица оператора. Подобные матрицы. Норма матрицы. Треугольные и ортогональные матрицы, их обращение. Число обусловленности и сингулярные числа. Метод Гаусса, разложение Холецкого, QR-разложение, SVD-разложение. Связь с МНК.

Задания для самостоятельной работы: Методы решения линейных уравнений.

## Раздел 3. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОПТИМИЗАЦИЯ

### Тема 1. Методы решения нелинейных уравнений.

Содержание темы: Нелинейный МНК. Связь задач оптимизации и решения нелинейных уравнений. Итерационные методы. Метод сжимающих отображений. Редукция многомерных задач к одномерным. Методы решения одномерных задач: деление пополам и метод Ньютона. Оценки скорости сходимости.

Задания для самостоятельной работы: Методы решения нелинейных уравнений.

### Тема 2. Методы решения задач оптимизации.

Содержание темы: Постановка задачи. Покоординатный спуск. Примеры и скорость сходимости. Определение градиента. Градиентный спуск и скорость его сходимости. Метод оврагов.

Задания для самостоятельной работы: Методы решения задач оптимизации.

## Раздел 4. АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

### Тема 1. Анализ Фурье.

Содержание темы: Ряд и интеграл Фурье, как альтернативные методы представления функции. Преобразование Фурье, формула его обращения и свойства. Соотношение неопределённостей.

Задания для самостоятельной работы: Анализ Фурье.

### Тема 2. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ).

Содержание темы: Постановка задачи. Прямое ДПФ и его обращение. Эффект наложения и интервал Найквиста. Алгоритм БПФ. Задачи обнаружения и сглаживания.

Задания для самостоятельной работы: Дискретное преобразование Фурье (ДПФ).

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины,  Форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	В том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, часы			Самостоятельная работа обучающегося, часы (реферат или контрольная работа)
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Всего	
МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ	12	10		10	2
Полиномиальная аппроксимация.		2		2	0
Интерполяция.		2		2	0
Численное дифференцирование и интегрирование.		4		4	2
Сплаины.		2		2	0
МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ (МНК)	10	8		8	2
Поиск зависимостей и МНК.		4		4	0
Методы решения линейных уравнений.		4		4	2
РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОПТИМИЗАЦИЯ	4	4		4	0
Методы решения нелинейных уравнений.		2		2	0
Методы решения задач оптимизации.		2		2	0
АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ	8	6		6	2
Анализ Фурье.		2		2	0
Дискретное преобразование Фурье (ДПФ).		4		4	2
Промежуточная аттестация: Зачет					2
<b>Итого</b>	<b>36</b>		<b>28</b>		<b>8</b>

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости (или темы рефератов).

Раздел I.

Тема 1.

1. Дайте определение норм в пространствах  $C(I)$ ,  $L_1(I)$ ,  $L_2(I)$ .

2. Найдите нормы функции  $\sin x$  в пространствах  $C(I)$ ,  $L_1(I)$  при  $I = [0, 2\pi]$ ,  $I = [0, \pi/2]$ .

3. Дайте определение пространства  $W_s(M_s, I)$ .

4. Оцените сверху ошибку наилучшего приближения функции  $\sin x$  полиномами третьей степени для различных  $s$  и тех же  $I$ , что и в задаче.

Тема 2.

1. Выведите формулы для интерполяционного полинома Лагранжа.
2. Выпишите интерполяционный полином Ньютона для функции  $\sin x$ , отвечающий равномерному разбиению отрезка  $[0,1]$  на 2 и 3 части. Сравните с разложением Тейлора.
3. Докажите, что  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$  — полином степени  $n$ . Напишите  $T_1(x)$ ,  $T_2(x)$ ,  $T_3(x)$ .

Тема 3.

1. Сравните точность двух простейших формул численного дифференцирования.
2. Выведите соответствующие формулы для оптимального шага дискретизации при наличии шума.
3. Выведите интерполяционную формулу численного дифференцирования из интерполяционного полинома Ньютона третьей степени.
4. Выведите формулу для размерности пространства сплайнов  $S_{n,v}(\Delta N)$ . Найдите  $\dim S_{3,1}(\Delta N)$ .

Раздел II.

Тема 1.

1. Решите задачу Д.И. Менделеева по его экспериментальным данным и определите невязки.
2. Дайте вывод нормальных уравнений.
3. Дайте общую постановку задачи МНК.

Тема 2.

1. Дайте вывод формул для норм  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  на пространстве матриц.
2. Дайте определение числа обусловленности и выведите формулу для него.
3. Докажите, что QR и SVD решения совпадают с МНК.

Раздел III.

Тема 1.

1. Дайте вывод формулы для скорости сходимости в методах сжимающих отображений.
2. Выведите формулу для итерационного процесса Ньютона.

Тема 2.

1. Найдите формулы для  $(x_n, y_n)$  при координатном спуске из  $(x_0, y_0) = (0, 1)$  для  $\Phi(x, y) = x^2 + \lambda(x - y)^2$ .
2. Найдите формулы для двух итераций в градиентном спуске для  $\Phi(x, y) = x^2 + \lambda y^2$  при больших  $\lambda$ .
3. Приведите графическое описание метода оврагов и карту уровней  $\Phi(x, y)$  для случая, когда надо этот метод применять.

Раздел IV.

Тема 1.

1. Найдите преобразование Фурье для  $k$ -ой производной функции  $f(x)$ , если известно преобразование Фурье для самой  $f(x)$ .
2. Дайте эвристическое обоснование формул обращения интеграла Фурье, исходя из ряда Фурье.

3. Найдите преобразование Фурье функции  $\exp(-at^2)$  и обоснуйте на этом примере принцип неопределённости.

Тема 2.

1. Дайте определение ДПФ и вывод формулы его обращения.

2. Объясните эффект наложения и роль интервала Найквиста.

3. Приведите примеры спектральных окон для задачи сглаживания и оцените их пространственное разрешение.

7.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

1. Разделенные разности интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона

2. Оценки точности аппроксимации. Нормы в пространстве функции

3. Оценка пространства сплайнов и вывод его разности. Кубические сплайны и дефекты 1.

4. Постановка задачи в методе наименьших квадратов Последовательности шагов при его применении.

5. Методы решения нормальных уравнений

6. Нормы в пространстве матриц. Описание и роль числа обусловленности.

7. Методы решения систем нелинейных уравнений. Метод юнеподвижной точки

8. Постановка задачи и оптимизации. Покоординатный и градиентный спуск.

9. Определение преобразования Фурье и формула его обращения. Фильтрация и обнаружение малых сигналов.

10. Дискретные преобразование Фурье и его обращение. Ошибки дискретизации и эффект наложения.

#### Шкала и критерии оценивания результатов обучения по дисциплине.

Результаты обучения	«Неудовлетворительно»	«Удовлетворительно»	«Хорошо»	«Отлично»
<b>Знания</b> основных численных методов обработки экспериментальных данных, областей их практического применения	Знания отсутствуют	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Систематические знания
<b>Умение</b> формулирования и решения конкретных задач на основе численных методов обработки экспериментальных данных, обобщения полученных результатов получения экспериментальных данных, проведение их	Умения отсутствуют	В целом успешное, но не систематическое умение, допускает неточности непринципиального характера	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение формулировать и решать конкретные задачи	Успешное умение формулировать и решать конкретные задачи

математической обработки				
<b>Владение:</b> навыками поиска необходимых данных в открытых источниках (в том числе, в информационных базах данных Python: пакеты SciPy, NumPy, Matplotlib Pandas, Scikit-learn, Math; R: Wolfram, Excel, Origin) и применения их при решении практических задач	Навыки владения отсутствуют	Фрагментарное владение методами, наличие отдельных навыков.	В целом, сформированные навыки владения, но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

#### 8. Ресурсное обеспечение:

- Перечень основной и дополнительной литературы

##### А. Основная литература:

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - Москва: Бином. Лаборатория знаний, 2008
2. Фарсайт Д.Ж., Малькольм М., Моулера М. Машинные методы математических вычислений. - Москва: Мир, 1980
3. Завьялов Ю.С., Квасов В.А., Мирошниченко В.А. Методы сплайн-функций. - Москва: Наука, 1980
4. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. - Москва: Мир, 2001

##### Б. Дополнительная литература:

5. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. - т. 1, Москва: Наука, 1966
6. Локуцкий О.В., Гавриков М.Б. Начала численного анализа. - Москва: Янус, 1995
7. Хеминг Р.В. Численные методы. - Москва: Наука, 1969
8. Жуков А.И. Метод Фурье в вычислительной математике. - Москва: Наука, 1992
9. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. - Москва: Наука, 1986

- Перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем Python: пакет SciPy для научных расчетов; пакет NumPy для работы с данными и базовыми численными методами; пакет Matplotlib для построения графиков; пакет Pandas для анализа данных; пакет Scikit-learn для численных методов и машинного обучения; пакет Math – для математических функций, seaborn для построения графиков; R: встроенные средства для численных методов и графики; Wolfram:



система символьной математики; Excel: анализ данных, численные методы, графика; Origin: анализ данных численные методы, графика.

- Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости)

Электронная библиотека МГУ <http://www.nbmgu.ru/publicdb/>

- Описание материально-технического обеспечения:  
Лекционная аудитория, доска.