

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет биоинженерии и биоинформатики

УТВЕРЖДАЮ

Декан
факультета биоинженерии
и биоинформатики,
академик

_____/В.П. Скулачев /

« ____ » _____ 20__ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины:

Теория вероятностей

Уровень высшего образования:

специалитет

Направление подготовки (специальность):

06.05.01 Биоинженерия и биоинформатика

Форма обучения:

очная

Рабочая программа рассмотрена и одобрена

Ученым советом факультета

(протокол № _____, _____)

Москва 20__

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по специальности 06.05.01 «Биоинженерия и биоинформатика» (программы специалитета) в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

Год (годы) приема на обучение – 2016, 2017, 2018, 2019.

© Факультет биоинженерии и биоинформатики МГУ имени М.В. Ломоносова

Программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения факультета.

Цель и задачи дисциплины

Цель - освоение слушателями основ теории вероятностей и ее приложений.

Задачи курса:

- фундаментальная подготовка слушателей в области математических основ теории вероятностей
- знакомство студентов с возможностями описания результатов научных экспериментов с помощью вероятностных моделей и различными приложениями теории вероятностей к исследованию реальных данных
- овладение математическим аппаратом анализа вероятностных моделей

1. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО – базовая часть, математический и естественно – научный цикл, курс II, семестр – 3.

2. Входные требования для освоения дисциплины, предварительные условия (если есть): *желательно, базовое освоение дисциплин: «Математический анализ», «Линейная алгебра», «Комбинаторика» и т.д.*

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине:

Знать:

основные определения и формулировки основополагающих результатов теории вероятностей, проводить доказательства некоторых наиболее важных утверждений, строить примеры различных классов вероятностных моделей.

Уметь:

самостоятельно решать теоретические и вычислительные задачи по теории вероятностей, аналогичные разбираемым в курсе и на семинарских занятиях, доказывать утверждения, родственные изложенным в курсе, а также приводить поясняющие примеры и контрпримеры.

Владеть:

владеть разнообразным математическим аппаратом, необходимым для описания и анализа вероятностных моделей. Приобрести навыки работы с научной литературой по теории вероятностей.

Иметь опыт

применения вероятностных моделей на практике.

4. Формат обучения – лекционные и семинарские занятия.

5. Объем дисциплины составляет 3 з.е., в том числе 72 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 36 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

6. Краткое содержание дисциплины (аннотация):

Программа разработана для семестрового курса лекций по теории вероятностей для студентов факультета биоинженерии и биоинформатики МГУ имени М. В. Ломоносова.

Первые семь лекций в основном относятся к изучению дискретных вероятностных пространств. Курс начинается с рассмотрения случайного эксперимента с конечным числом исходов и его формализации. Приводятся многочисленные примеры. Особое место уделяется условным вероятностям и их свойствам. Вводится понятие случайной величины, заданной на дискретном вероятностном пространстве. Рассматриваются основные типы дискретных распределений, часто возникающих в прикладных задачах. Особое место занимают вопросы, связанные с понятием взаимной независимости случайных величин. Доказывается ряд фундаментальных теорем для сумм случайных величин, среди которых закон больших чисел в форме Чебышева и классические теоремы Муавра-Лапласа для схемы Бернулли.

Остальные лекции посвящены общим вероятностным пространствам. В этой части курса случайные величины задаются уже на общем вероятностном пространстве. Изучаются функции распределения случайных величин. Вводится определение абсолютно непрерывной случайной величины. Приводятся примеры распределений, обладающих плотностью. Важным моментом является изучение характеристик распределений, таких как математическое ожидание, дисперсия, квантили, медиана, мода, асимметрия, эксцесс, выборочные оценок которых

строятся в курсе математической статистики, следующим в программе за курсом теории вероятностей. Основой курса являются доказательства закона больших чисел в форме Хинчина, центральной предельной теоремы и усиленного закона больших чисел. Для этого вводятся характеристические функции, с использованием которых доказываются основные утверждения. Эта тема важна, и сама по себе, например, в связи с быстрыми преобразованиями Фурье, имеющими многочисленные практические применения. В курсе вводятся многомерные распределения, среди которых полиномиальное и многомерное нормальное распределение. Завершается курс по теории вероятностей лекцией, посвященной марковским цепям, которые имеют разнообразные применения в генетике, теории массового обслуживания, статистической физике и других областях.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, Форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	В том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, часы			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Всего	
Тема 1.	5	2	2	4	1
Тема 2	6	2	2	4	2
Тема 3	6	2	2	4	2
Тема 4	6	2	2	4	2
Тема 5	6	2	2	4	2
Тема 6	6	2	2	4	2
Тема 7	6	2	2	4	2
Тема 8	6	2	2	4	2
Тема 9	5	2	2 Контр. раб.	4	1
Тема 10	6	2	2	4	2
Тема 11	6	2	2	4	2
Тема 12	5	2	2	4	1
Тема 13	6	2	2	4	2
Тема 14	6	2	2	4	2
Тема 15	6	2	2	4	2
Тема 16	6	2	2	4	2
Тема 17	6	2	2	4	2
Тема 18	5	2	2 Контр. раб.	4	1
Промежуточная аттестация: экзамен					4
Итого	108	36	36	72	36

Наименование	Краткое содержание разделов и тем дисциплины
Тема 1. Пространство элементарных	Пространство элементарных событий с конечным числом исходов. Примеры. События. Операции над событиями. Вероятности событий, их простейшие свойства. Формула для вычисления вероятности

событий с конечным числом исходов	объединения конечного числа событий. Классическое определение вероятностей.
Тема 2. Условные вероятности. Формула полной вероятности	Условные вероятности. Свойства условных вероятностей. Формула произведения вероятностей. Разбиение вероятностного пространства. Формула полной вероятности и теорема Байеса. Независимость событий. Примеры
Тема 3. Дискретное вероятностное пространство. Случайная величина	Дискретное вероятностное пространство. Определение случайной величины, заданной на дискретном вероятностном пространстве. Распределение дискретной случайной величины. Примеры дискретных распределений. Распределение Бернулли, биномиальное, Пуассона. Определение математического ожидания дискретной случайной величины. Формула для подсчета математического ожидания. Свойства математического ожидания.
Тема 4. Независимость случайных величины. Свойства	Дисперсия. Ковариация. Свойства дисперсии. Индикаторы событий. Независимость дискретных случайных величин. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин. Некоррелированность. Дисперсия суммы.
Тема 5. Суммы независимых случайных величин.	Распределение суммы независимых целочисленных случайных величин. Биномиальное распределение. Соотношение между некоррелированностью и независимостью. Коэффициент корреляции как мера линейной зависимости случайных величин
Тема 6. Неравенства Чебышева. Предельная теорема Пуассона	Неравенства Чебышева и Маркова. Закон больших чисел в форме Чебышева. Закон больших чисел в форме Бернулли. Предельная теорема Пуассона. Формулировка интегральной теоремы Муавра-Лапласа
Тема 7. Теоремы Муавра-Лапласа	Формулировка локальной теоремы Муавра-Лапласа. Примеры. Формула Стирлинга. Доказательство локальной теоремы Муавра-Лапласа.
Тема 8 Общее определение вероятностного пространства	Общее определение вероятностного пространства. Пример неизмеримого множества. Определение случайной величины, заданной на общем вероятностном пространстве.
Тема 9. Функция распределения случайной величины. Плотность.	Функция распределения случайной величины. Свойства. Абсолютно непрерывные случайные величины. Плотность. Непрерывные распределения. Примеры непрерывных распределений.
Тема 10. Характеристики распределения случайных величин	Характеристики распределения: математическое ожидание, дисперсия, моменты, квантили, медиана, мода, асимметрия, эксцесс. Характеристики распределения гауссовской случайной величины. Распределения, связанные с нормальным: распределение χ^2 , распределение Стюдента, F-распределение, логарифмически-нормальное распределение.
Тема 11. Преобразования случайных величин	Симметричные распределения. Правило "трех сигм". Преобразования случайных величин. Примеры.
Тема 12. Характеристические функции	Характеристические функции. Примеры. Характеристические функции распределения Пуассона; суммы независимых одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин; нормального распределения. Свойства характеристических функций.

Тема 13. Закон больших чисел в форме Хинчина.	Теорема единственности и формула обращения (без доказательства). Сходимость по распределению (слабая сходимость). Теорема непрерывности о связи между функциями распределения и характеристическими функциями (без доказательства). Связь между сходимостью по вероятности и слабой сходимостью. Закон больших чисел в форме Хинчина.
Тема 14. Центральная предельная теорема и ее обобщения	Центральная предельная теорема (ЦПТ) для независимых одинаково распределенных случайных величин. Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа как следствие ЦПТ. Оценка Берри-Эссеена о скорости сходимости в ЦПТ (без доказательства). Формулировка ЦПТ для независимых разно распределенных случайных величин. Условие Линдеберга. Пример случайных величин, удовлетворяющих условию Линдеберга. Сходимость с вероятностью единица.
Тема 15. Усиленный закон больших чисел	Усиленный закон больших чисел. Совместная функция распределения случайных величин. Совместная плотность. Формула для подсчета вероятности попадания в область. Математическое ожидание функции от нескольких случайных величин. Независимые случайные величины (общий случай). Вид совместной функции распределения и совместной плотности для независимых случайных величин. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин.
Тема 16. Формула свертки	Пример некоррелированных случайных величин, являющихся зависимыми. Формула свертки. Пример свертки двух независимых гауссовских случайных величин
Тема 17. Многомерные распределения	Многомерное нормальное распределение (продолжение). Полиномиальное распределение
Тема 18. Цепи Маркова	Определение цепи Маркова. Пример однородной цепи Маркова. Марковское свойство. Модель Эренфестов. Примеры

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости по темам.

1. Вероятностная модель эксперимента с конечным числом исходов (темы 1-2)

1.1. Пространство элементарных событий с конечным числом исходов. Примеры

1.2. События. Операции над событиями. Вероятности событий, их простейшие свойства. Формула для вычисления вероятности объединения конечного числа событий. Классическое определение вероятностей

1.3. Условные вероятности. Свойства условных вероятностей. Формула произведения вероятностей

1.4. Разбиение вероятностного пространства. Формула полной вероятности и теорема Байеса

1.5. Независимость событий. Примеры

2. Случайные величины, заданные на дискретном вероятностном пространстве (темы 3-7)

2.1. Дискретное вероятностное пространство. Определение случайной величины, заданной на дискретном вероятностном пространстве. Распределение дискретной случайной величины

2.2. Примеры дискретных распределений. Распределение Бернулли, Пуассона

2.3. Определение математического ожидания дискретной случайной величины. Формула для подсчета математического ожидания

- 2.4. Свойства математического ожидания
- 2.5. Дисперсия. Ковариация. Свойства дисперсии
- 2.6. Индикаторы событий
- 2.7. Независимость дискретных случайных величин
- 2.8. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин
- 2.9. Некоррелированность. Дисперсия суммы. Случай независимых слагаемых
- 2.10. Коэффициент корреляции как мера линейной зависимости случайных величин. Соотношение между некоррелированностью и независимостью
- 2.11. Распределение суммы независимых целочисленных случайных величин. Биномиальное распределение
- 2.12. Неравенства Чебышева
- 2.13. Закон больших чисел в форме Чебышева
- 2.14. Закон больших чисел в форме Бернулли
- 2.15. Формула Стирлинга. Локальная теорема Муавра-Лапласа. Формулировка интегральной теоремы Муавра-Лапласа
- 2.16. Предельная теорема Пуассона

3. Случайные величины (общий случай) (темы 8-11)

- 3.1. Общее определение вероятностного пространства. Пример неизмеримого множества. Функция распределения непрерывной случайной величины. Свойства
- 3.2. Абсолютно непрерывные случайные величины. Плотность
- 3.3. Непрерывные распределения. Примеры
 - i. Равномерное распределение
 - ii. Экспоненциальное распределение
 - iii. Нормальное (гауссовское) распределение
 - iv. Распределения, связанные с нормальным: распределение χ^2 , Стьюдента, F - распределение, логарифмически-нормальное распределение
- 3.4. Формулы для математического ожидания и дисперсии абсолютно непрерывной случайной величины
- 3.5. Характеристики распределения: математическое ожидание, дисперсия, моменты, квантили, медиана, мода, асимметрия, эксцесс,
- 3.6. Характеристики распределения гауссовской случайной величины. Правило ``трех сигм``

4. Предельные законы теории вероятностей (темы 12-15)

- 4.1. Характеристические функции. Характеристическая функция суммы независимых одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин. Характеристическая функция распределения Пуассона
- 4.2. Закон больших чисел в форме Хинчина
- 4.3. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин
- 4.4. Условие Линдеберга. Формулировка центральной предельной теоремы для независимых случайных величин. Оценка Берри-Эссена о скорости сходимости в центральной предельной теореме (без доказательства)
- 4.5. Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа как следствие ЦПТ
- 4.6. Сходимость по вероятности. Сходимость с вероятностью единица. Формулировка усиленного закона больших чисел
- 4.7. Преобразования случайных величин. Примеры

5. Совместное распределение случайных величин (тема 16-17)

- 5.1. Совместная функция распределения случайных величин. Совместная плотность. Формула для подсчета вероятности попадания в область
- 5.2. Математическое ожидание функции от нескольких случайных величин
- 5.3. Независимые случайные величины (общий случай). Вид совместной функции распределения и совместной плотности
- 5.4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин
- 5.6. Формула свертки
- 5.7. Многомерное нормальное распределение
- 5.8. Полиномиальное распределение

6. Цепи Маркова (тема 18)

- 6.1. Определение цепи Маркова
- 6.2. Пример однородной цепи Маркова
- 6.3. Марковское свойство
- 6.4. Модель Эренфестов

7.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

Сборник с типовыми контрольными заданиями для проведения промежуточной аттестации прилагается.

Яровая Е.Б., Голдаева А.А., Кондратенко А.Е. Сборник контрольных работ по теории вероятностей} // М: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, ISBN: 978--5--4294--0015--0, 2015, 125 с.

Шкала и критерии оценивания результатов обучения по дисциплине.

Результаты обучения	«Неудовлетворительно»	«Удовлетворительно»	«Хорошо»	«Отлично»
Знания: основных определений и формулировок основополагающих результатов теории вероятностей, проводить доказательства некоторых наиболее важных утверждений, строить примеры различных классов вероятностных моделей	Знания отсутствуют	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения: самостоятельно решать теоретические и вычислительные задачи по теории вероятностей,	Умения отсутствуют	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности)	Успешное и систематическое умение

аналогичные разбираемым в курсе и на семинарских занятиях, доказывать утверждения, родственные изложенным в курсе, а также приводить поясняющие примеры и контрпримеры			непринципиального характера)	
Владения: разнообразным математическим аппаратом, необходимым для описания и анализа вероятностных моделей.	Навыки владения отсутствуют	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

8. Ресурсное обеспечение:

- Перечень основной и дополнительной литературы:
 1. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М: ``УРСС'', 2001.
 2. Ивашев-Мусатов О. С. Теория вероятностей и математическая статистика. М: ``ФИМА'', 2003
 3. Козлов М. В. Элементы теории вероятностей в примерах и задачах. М: ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2005.
 4. Ламперти Д. Вероятность. М: ``Наука'', 1973.
 5. Манита А. Д. Теория вероятностей и математическая статистика. Интернет-учебник. <http://teorver-online.narod.ru>
 6. Тутубалин В. Н. Теория вероятностей и случайных процессов. М: ``Издательство Московского университета'', 1992.
 7. Тюрин Ю. Н., Макаров А. А., Симонова Г. И. Теория вероятностей. М: Издательство МЦНМО, 2009.
 8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1-2. М: ``Мир'', 1984.
 9. Ширяев А. Н. Вероятность. В 2-х кн. М: Издательство МЦНМО, 2004.
 10. Яровая~Е.Б., Голдаева~А.А., Кондратенко~А.Е. Сборник контрольных работ по теории вероятностей. М: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, ISBN: 978--5--4294--0015--0, 2015.