

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
*Факультет биоинженерии и биоинформатики*

УТВЕРЖДАЮ  
Декан  
факультета биоинженерии  
и биоинформатики,  
академик

\_\_\_\_\_/В.П. Скулачев /  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 20 г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Наименование дисциплины:**

**Математический анализ**

**Уровень высшего образования:**  
**специалитет**

**Направление подготовки (специальность):**

**06.05.01 Биоинженерия и биоинформатика**

**Направленность (профиль) ОПОП:**

**Форма обучения:**  
**очная**

Рабочая программа рассмотрена и одобрена

*Ученым советом факультета*  
(протокол № \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_)

Москва 20\_\_

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по специальности 06.05.01 «Биоинженерия и биоинформатика» (программы специалитета) в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.  
Год (годы) приема на обучение – 2016, 2017, 2018, 2019.

© Факультет биоинженерии и биоинформатики МГУ имени М.В. Ломоносова

*Программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения факультета.*

## **Цели и задачи дисциплины**

### **Цели:**

- формирование математической культуры студентов,
- развитие математического кругозора и мышления,
- фундаментальная подготовка студентов в области математического анализа для дальнейшего использования приобретенных знаний в других областях математики и дисциплинах естественнонаучного содержания.

**Задачи:** обучение студентов базовым теоретическим положениям и понятиям математического анализа, фундаментальная подготовка студентов в этой области, овладение современным аппаратом математического анализа для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

**1.** Место дисциплины в структуре ОПОП ВО – базовая часть, математический и естественно-научный цикл; курсы I, II – семестры 1, 2, 3.

**2.** Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия (если есть): курс математического анализа – существенное развитие базовых курсов алгебры и начала анализа школьной программы. Человек должен быть допущен к учебе в университете по результатам вступительных экзаменов.

**3.** Планируемые результаты обучения по дисциплине:

### **Знать:**

основные понятия, определения и свойства объектов математического анализа, формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их связи и приложения в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

### **Уметь:**

доказывать утверждения математического анализа, решать задачи математического анализа, уметь применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

### **Владеть:**

аппаратом математического анализа, методами доказательства утверждений и методами решения задач, навыками применения этого в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

### **Иметь опыт:**

постановки задач, их математической формализации, разработки плана решения и применения полученных знаний и навыков при решении исследовательских задач в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

**4.** Формат обучения – лекционные и семинарские занятия.

**5.** Объем дисциплины составляет 10 з.е., в том числе 208 академических часов, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 152 академических часа на самостоятельную работу обучающихся.

**6.** Краткое содержание дисциплины (аннотация):

Элементы теории множеств, предел функции и последовательности, непрерывность и равномерная непрерывность функции на множестве, производная и дифференциал, развитие темы производной для вычисления пределов и построения графика функции; интеграл Римана и его приложения, несобственные интегралы, функции нескольких переменных, числовые и функциональные ряды, ряды Фурье, кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, формулы Стокса и Гаусса – Остроградского, элементы теории поля, преобразование Фурье.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины,  Форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	В том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, часы			Самостоятельная работа обучающегося, часы (виды самостоятельной работы – эссе, реферат, контрольная работа и пр. – указываются при необходимости)
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Всего	
1 СЕМЕСТР					
1.1 Множества и операции над ними. Предел последовательности и его свойства. Предел монотонной ограниченной последовательности. Число «e». Критерий Коши сходимости последовательности. Предел функции, его свойства, основные факты. Замечательные пределы.	20	16	0	16	4
1.2 Функции, непрерывные в точке и на отрезке, и их свойства; теоремы Вейерштрасса, Кантора. Теорема об обратной функции. Модуль непрерывности. Элементарные функции, их свойства. Производная, касательная, дифференциал их связи. Правила вычисления производных, дифференциалов.	17	14	0	14	3
1.3 Локальная формула Тейлора, правила Лопиталя, теорема Ферма, Достаточные условия локального экстремума. Глобальные экстремумы функции на отрезке. Выпуклость, точки перегиба, асимптоты, исследование функции и построение графика.	9	6	0	6	3
1.4 Эскизы графиков функций. Предел функции и предел	28	0	16	16	12

последовательности.					
1.5 Приложения производной (в т.ч. ф-лы Лейбница, Тейлора, раскрытие неопределённостей, исследование функции, график функции, задачи на экстремум).	30	0	20	20	10
Промежуточная аттестация: По пунктам 1.1—1.3 в конце <i>I семестра</i> проводится Коллоквиум по теоретической части курса (форма устная – беседа со студентом по программе лекционного курса). По пунктам 1.4 и 1.5, соответственно, в часы семинарских занятий <i>I семестра</i> проводятся две контрольные работы по 2 часа каждая.					
Форма промежуточной аттестации - зачет					4(количество часов, отведенных на промежуточную аттестацию)
Итого	108	36	36	72	36
<i>2 СЕМЕСТР</i>					
2.1 Первообразная, неопределенный интеграл и его свойства, основные методы вычисления неопределенных интегралов (интегрирование по частям, рациональных дробей, некоторых иррациональностей, тригонометрических выражений и др.)	30	4	12	16	14
2.2 Определенный интеграл Римана. Простейшие свойства интегралов. Необходимое условие интегрируемости по Риману. Верхние и нижние суммы Дарбу и их свойства. Критерий Дарбу интегрируемости. Интегрируемость непрерывных, монотонных, кусочно-непрерывных функций по Риману. Интегрируемость произведения, интегрирование неравенств, интегрируемость модуля функции.	14	6	2	8	6

2.3 Интеграл с переменным верхним пределом: непрерывность, дифференцируемость в точке. Существование первообразных. Формула Ньютона - Лейбница. Интегрирование по частям для интеграла Римана. Замена переменной в интегралах. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Первая теорема о среднем. Геометрические приложения интеграла Римана (в т.ч. вычисление площадей, длин кривых).	11	5	0	5	6
2.4 Несобственные интегралы. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов, признак сравнения, выделение главной части. Абсолютная и условная сходимости Н.И. Признаки сходимости Дирихле и Абеля.	15	4	4	8	7
2.5 N-мерное евклидово пространство, норма в нем. Открытые и замкнутые множества, их свойства (внутренняя, предельная, граничная точки, замкнутые и ограниченные множества, компакты и их отображения). Неравенство Коши - Буняковского-Шварца. Компактность в n-мерном пространстве. Предел функции нескольких переменных и его свойства. Непрерывные функции и их свойства.	12	4	2	6	6
2.6 Дифференцируемость функций нескольких переменных. Дифференциал. Частные производные. Геометрический смысл дифференцируемости функций нескольких переменных. Достаточные условия дифференцируемости. Производная по направлению. Градиент.	12	4	0	4	8
2.7 Частные производные и дифференциалы высших порядков, теоремы Шварца и	8	2	0	2	6

Юнга. Формула Тейлора, функции нескольких переменных. Локальный экстремум функции нескольких переменных.					
2.8 Приложения определенного интеграла (в т.ч. вычисление площадей областей, объемов тел вращения).	9	0	3	3	6
2.9 Дифференцирование функций нескольких переменных: частные производные, приложения (в т.ч. задачи на экстремум и условный экстремум).	12	0	5	5	7
2.10 Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Операции над рядами. Ряды с неотрицательными членами, признаки сходимости: признаки сравнения, признаки Д'Аламбера, Коши, интегральный Коши-Маклорена. Знакопеременные ряды: абсолютная и условная сходимость, признаки сходимости Лейбница, Абеля и Дирихле.	15	3	4	7	8
Промежуточная аттестация: По пунктам 2.1 и 2.8-2.10, соответственно, в часы семинарских занятий <i>2-го семестра</i> проводятся две контрольные работы по 2 часа каждая. По результатам двух контрольных работ студента некоторые задачи выносятся на экзамен. По пунктам 2.1—2.10 в конце <i>2 семестра</i> проводится Экзамен по теоретической части курса (форма устная – беседа со студентом по программе лекционного курса).					
Форма промежуточной аттестации - экзамен					<i>6 (количество часов, отведенных на промежуточную аттестацию)</i>
	144	32	32	64	80
3 СЕМЕСТР					

3.1 Функциональные последовательности и ряды Определения поточечной и равномерной сходимости. Критерий Коши равномерной сходимости. Необходимый признак сходимости. Мажорантный признак Вейерштрасса.	21	6	8	14	7
3.2 Ортогональные системы функций. Обобщенные ряды Фурье. Тригонометрические ряды Фурье.	12	4	4	8	4
3.3 Внутренняя, предельная, граничная точки. Замкнутые и ограниченные множества. Компакты. Связные множества. Понятие отображения компактов и связных множеств. Свойства этих отображений. Двойной интеграл. Свойства двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному. Тройной интеграл. Свойства тройного интеграла. Сведение тройного интеграла к повторному.	27	10	10	20	7
3.4 Криволинейные интегралы 1-го рода. Независимость от параметризации кривой. Свойства криволинейных интегралов 1-го рода. Криволинейные интегралы 2-го рода. Свойства криволинейных интегралов 2-го рода. Формула Грина. Поверхностные интегралы 1-го рода.	16	6	4	10	6
3.5 Поверхностные интегралы 2-го рода. Формулы Стокса и Гаусса – Остроградского. Скалярные и векторные поля. Градиент. Дивергенция. Ротор.	22	8	8	16	6
3.6 Преобразование Фурье. Основные свойства. Обратное Преобразование Фурье.	6	2	2	4	2
Промежуточная аттестация: По пунктам 3.1—3.5 в часы					



семинарских занятий 3-го семестра проводятся две контрольные работы по 2 часа каждая в середине и конце семестра. В конце 3 семестра проводится письменный экзамен (форма: письменная работа по практической части курса на 4 часа).					
Форма промежуточной аттестации - экзамен					4 (количество часов, отведенных на промежуточную аттестацию)
	108	36	36	72	36
<b>Итого:</b>	360	104	104	208	152

### Содержание дисциплины. План курса.

#### Семестр 1. Предел функции. Производная.

*Тема 1. Предел последовательности и его свойства. Предел монотонной ограниченной последовательности. Число «e». Критерий Коши сходимости последовательности. Предел функции, два определения предела функции, их эквивалентность. Свойства предела функции. Критерий Коши существования предела функции. Односторонние пределы и их свойства. Замечательные пределы.*

*Тема 2. Функции, непрерывные в точке, на отрезке и их свойства; теоремы Вейерштрасса, Кантора. Теорема об обратной функции. Модуль непрерывности. Элементарные функции, их свойства. Классификация точек разрыва функции.*

*Производная, касательная, дифференциал функции. Правила вычисления производных. Производные элементарных функций. Производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Следствия теоремы Лагранжа. Свойства производной, формула Лейбница.*

*Тема 3. Правила Лопиталья. Локальная формула Тейлора. Разложения некоторых элементарных функций. Вычисление пределов функций с применением новых методов. Монотонность функции, связь с производной. Локальный экстремум функции, теорема Ферма. Достаточные условия локального экстремума. Глобальный экстремум функции на отрезке. Выпуклость, точки перегиба, асимптоты. Исследование функции и построение графика.*

#### Семестр 2. Интеграл Римана. Функции многих переменных.

*Тема 4. Первообразная, неопределенный интеграл и его свойства. Интегрирование рациональных дробей, различных иррациональностей, тригонометрических и некоторых других выражений.*

*Тема 5. Определенный интеграл Римана. Простейшие свойства интегралов. Необходимое условие интегрируемости по Риману. Верхние и нижние суммы Дарбу. Критерий Дарбу интегрируемости, критерий Лебега. Интегрируемость непрерывных, монотонных, кусочно-непрерывных функций по Риману. Интегрируемость произведения, интегрирование неравенств, интегрируемость модуля функции.*

*Тема 6. Интеграл с переменным верхним пределом: непрерывность, дифференцируемость в точке. . Существование первообразных. Формула Ньютона – Лейбница. Интегрирование по частям для интеграла Римана. Замена переменной в интегралах. Формула Тейлора с*

остаточным членом в интегральной форме. Первая теорема о среднем. Геометрические приложения интеграла Римана ( в т.ч. вычисление площадей, длин кривых, объемов тел вращения).

Тема 7. Несобственные интегралы. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов, признаки сходимости (признак сравнения, метод выделения главной части). Абсолютная и условная сходимость Н.И. Признаки сходимости Дирихле и Абеля.

Тема 8.  $n$ -мерное пространство, норма в нем, открытые и замкнутые множества, их свойства. Неравенство Коши – Буняковского - Шварца. Компактность в  $n$ -мерном пространстве. Предел функции нескольких переменных и его свойства. Непрерывные функции и их свойства.

Тема 9. Дифференцируемость функций нескольких переменных. Дифференциал. Частные производные (в т.ч. частные производные сложных функций и неявно заданных функций). Геометрический смысл дифференцируемости функции нескольких переменных. Достаточные условия дифференцируемости. Производная по направлению, градиент, их связь и смысл. Правила дифференцирования, примеры.)

Тема 10. Частные производные и дифференциалы высших порядков, теоремы Шварца и Юнга. Формула Тейлора для функции нескольких переменных с остаточным членом в форме Лагранжа, Пеано, примеры разложения функций. Локальный экстремум функции нескольких переменных, его отыскание. Необходимое и достаточные условия его существования. Условный экстремум.

Тема 11. Числовые ряды. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Операции над рядами. Ряды с неотрицательными членами, признаки сходимости: признаки сравнения, признаки Д’Аламбера, Коши, интегральный Коши-Маклорена. Знакопеременные ряды: абсолютная и условная сходимость, ряды Лейбница, признаки сходимости Абеля и Дирихле. Задачи на исследование сходимости рядов.

Семестр 3. Функциональные ряды. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.

Тема 12. Функциональные последовательности и ряды, определение поточечной и равномерной сходимости. Критерий Коши равномерной сходимости. Необходимый признак сходимости. Мажорантный признак Вейерштрасса.

Теорема о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций и суммы равномерно сходящегося ряда. Теорема о почленном интегрировании равномерно сходящихся последовательностей и рядов.

Теорема о почленном дифференцировании последовательностей и рядов.

Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда. Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Единственность степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Ряды Тейлора. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда Тейлора функции к самой функции. Табличные разложения.

Тема 13. Ортогональные системы функций. Обобщенные ряды Фурье. Тригонометрические ряды Фурье. Сходимость и равномерная сходимость тригонометрических рядов Фурье. Разложение в тригонометрический ряд Фурье четных и нечетных функций. Четные и нечетные продолжения. Разложения на различных промежутках.

Тема 14. Внутренняя, предельная, граничная точки. Замкнутые и ограниченные множества. Компакты. Связные множества. Понятие отображения компактов и связных множеств. Свойства этих отображений. Двойной интеграл. Свойства двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному. Замена переменных в двойном интеграле, полярная замена координат. Понятие якобиана преобразования. Понятие несобственного двойного интеграла. Тройной интеграл. Свойства тройного интеграла. Сведение тройного интеграла к повторному. Сферические и цилиндрические координаты.

*Тема 15. Криволинейные интегралы 1-го рода. Независимость от параметризации кривой. Свойства криволинейных интегралов 1-го рода. Криволинейные интегралы 2-го рода. Свойства криволинейных интегралов 2-го рода. Формула Грина. Поверхностные интегралы 1-го рода.*

*Тема 16. Поверхностные интегралы 2-го рода. Формулы Стокса и Гаусса-Остроградского. Скалярные и векторные поля. Градиент. Дивергенция. Ротор. Типы векторных полей. Циркуляция вектора. Формула Стокса в векторной форме. Поток вектора. Формула Гаусса-Остроградского в векторной форме.*

*Тема 17. Преобразование Фурье. Основные свойства. Обратное преобразование Фурье.*

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

В течение каждого из трех семестров студенты разбирают и решают задачи, указанные преподавателем к каждому семинару, разбирают и повторяют основные понятия и теоремы, доказанные на лекциях, разбирают (по желанию учащихся) домашние задания.

***Образцы письменных контрольных работ по семестрам.***

1-Й СЕМЕСТР

Контрольная работа №1.

Вычислить пределы функций: [1] 4.7, 4.17, 4.44, 4.87.

Эскизы графиков функций: [1] 3.88, 3.105, 3.138.

Исследовать функцию на непрерывность, указать характер точек разрыва:[5] 691.

Контрольная работа №2.

Вычислить производные явно заданных функций: [1] 7.45, 10.3(9).

Геометрический смысл производной: [5] 1073.

Правила Лопиталя: [5] 1322, 1356.

Формула Тейлора: [1] 15.25.

Графики функций с исследованием:

[1] 14.57 – с исследованием первой производной,

[1] 14.17 – с исследованием первой и второй производных.

2-Й СЕМЕСТР

Контрольная работа №1.

[1]: номера 16.35, 17.6, 17.26, 18.9, 18.10, 19.9, 21.6.

Контрольная работа №2.

[1]: 24.7, 24.53(13), [5]: 3238, 3295, 3394, [1] 39.2, [5] 2669, [5] 2718.

3-Й СЕМЕСТР

Контрольная работа №1.

[1]: 43.3, 44.4, 44.10, 44.38, [11]: 7 (на с.179).

Контрольная работа №2.

[1]: 45.20, 49.2, 50.11, 52.5, 54.5, 56.6(д).

7.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

В первом семестре проводится коллоквиум – устная беседа со студентом по лекционному курсу (см. **план курса 1 семестр**) и зачет по практической части курса (см. **образцы письменных контрольных работ 1 семестр**).

Во втором семестре проводят экзамен – устная беседа со студентом по лекционному курсу (см. **план курса 2 семестр**), к билету прилагаются 2 задачи (см. **образцы**

*письменных контрольных работ 2 семестр).*

В третьем семестре проводят письменный экзамен по задачам третьего семестра (см. *образцы письменных контрольных работ 3 семестр*).

**Шкала и критерии оценивания результатов обучения по дисциплине.**

Результаты обучения	«Неудовлетворительно»	«Удовлетворительно»	«Хорошо»	«Отлично»
Знания: основных понятий, определений и свойств объектов математического анализа, формулировок и доказательств утверждений, методов их доказательства, возможных сфер их связи и приложения в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания	Знания отсутствуют	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения: доказывать утверждения математического анализа, решать задачи математического анализа, уметь применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания	Умения отсутствуют	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Владения: аппаратом математического анализа, методами доказательства утверждений и методами решения задач, навыками	Навыки владения отсутствуют	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

применения этого в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания				
--	--	--	--	--

#### 8. Ресурсное обеспечение:

##### Список литературы по курсу математического анализа:

1. Власов В.В., Митрохин С.И., Прошкина А.В., Родионов Т.В., Трушина О.В.. Задачи и упражнения по математическому анализу и дифференциальным уравнениям.. - Москва: Интернет-университет информационных технологий, 2009
2. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.. Задачи и упражнения по математическому анализу. В 3-х частях.. - Москва: Факториал, 1996
3. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А., Задачи и упражнения по математическому анализу. Часть 1, 2.. - Дрофа, 2004
4. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А., Задачи и упражнения по математическому анализу. Часть 1, 2, 3 - Изд-во Московского ун-та, изд-во МЦНМО, 2017
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.. - Москва: Наука, 1972
6. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.. Сборник задач по математическому анализу.. - т. 1, 2, 3, Физматлит, 2003
7. Фихтенгольц Г.М.. Курс дифференциального и интегрального исчисления.. - т. 1, 2, 3, Москва: ГИФМЛ, 1963
8. Зорич В.А.. Математический анализ. Часть 1, 2.. - Москва: Фазис, 1997
9. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х.. Математический анализ.. - т. 1, 2, Москва: Издательство Московского университета, 1985
10. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.. Лекции по математическому анализу.. - Москва: Дрофа, 2004
11. Демидович Б.П., Моденов В.П.. Дифференциальные уравнения.. - СПб: Иван Федоров, 2003
12. Кудрявцев Н.Л. Лекции по математическому анализу. Москва: Сам полиграфист, 2013

Здесь к *Дополнительной литературе* можно отнести [2], [3], [6], [7], [10].

- Перечень лицензионного программного обеспечения (при необходимости)
- Перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем
- Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости)

Описание материально-технического обеспечения - необходимы учебные аудитории для проведения лекционных и семинарских занятий, доска, мел, флوماстеры.