Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет биоинженерии и биоинформатики

УТВЕРЖДАЮ
Декан
факультета биоинженерии
и биоинформатики,
академик
______________/В.П. Скулачев /

«____»______________20__г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины:

Линейная алгебра

Уровень высшего образования:
специалитет

Направление подготовки (специальность):

06.05.01 Биоинженерия и биоинформатика

Форма обучения:
очная

Рабочая программа рассмотрена и одобрена

Ученым советом факультета
(протокол №________,________________)

Москва 20___

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по специальности 06.05.01 «Биоинженерия и биоинформатика» (программы специалитета) в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

Год (годы) приема на обучение – 2016, 2017, 2018, 2019.

Цели и задачи дисциплины

Цели дисциплины: развитие математического кругозора и алгебраического мышления студентов;

- обучение студентов важнейшим теоретическим положениям линейной алгебры, началам абстрактной алгебры, матричным методам;

- выработка у студентов навыков решения конкретных задач, требующих исследования систем линейных уравнений, применения матричных вычислений, аналитической и многомерной геометрии, линейных операторов.

Задачи дисциплины: достичь владения студентами методами теории матриц, линейной алгебры, аналитической геометрии, основными алгоритмами: алгоритмом Гаусса и базирующимися на нем алгоритмами решения матричных задач и задач линейной алгебры. Подготовить студентов к применению линейной алгебры в дисциплинах, применяющих методы линейной алгебры.

1. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО – базовая часть, математический и естественно – научный цикл, курс I – семестр 1.

2. Входные требования для освоения дисциплины. Изучение данной дисциплины базируется на школьных курсах алгебры и начал анализа, геометрии

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине:

Знать

- точные формулировки основных понятий, относящихся к теории матриц и определителей, абстрактной алгебре, аналитической геометрии, линейной алгебре;
- основные теоремы о системах линейных уравнений, матрицах и определителях, прямых и плоскостях, линейных пространствах, линейных операторах, квадратичных формах, евклидовых пространствах, простейшие теоремы о группах, кольцах и полях.

Уметь

- решать системы линейных уравнений при помощи алгоритма Гаусса, вычислять ранги матриц, определители матриц, выполнять операции над матрицами;
- решать стандартные задачи векторной алгебры, геометрии прямых и плоскостей;
- находить базисы конечномерных линейных пространств и подпространств, координаты векторов, решать задачи о линейных операторах и собственных векторах при помощи матриц, простейшие задачи геометрии евклидовых пространств, исследовать квадратичные формы.

Владеть

- методами теории матриц, линейной алгебры, аналитической геометрии, основными алгоритмами: алгоритмом Гаусса и базирующимися на нем алгоритмами решения матричных задач и задач линейной алгебры, алгоритмом Лагранжа и пр.

Иметь опыт перехода от теории к постановке и решению задач на применение теории.

4. Формат обучения – лекционные и семинарские занятия.

5. Объем дисциплины составляет 3 з.е., в том числе 72 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 36 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

6. Краткое содержание дисциплины (аннотация): Матрицы, системы линейных уравнений, определители. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии. Линейные пространства, ранг, линейные операторы, квадратичные формы.

<table>
<tr><th rowspan="3">Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины,

Форма промежуточной аттестации по дисциплине</th><th rowspan="3">Всего (часы)</th><th colspan="4">В том числе</th></tr>
<tr><th colspan="3">Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем)
Виды контактной работы, часы</th><th>Самостоятельная работа обучающегося, часы
(виды самостоятельной работы – эссе, реферат, контрольная работа и пр. – указываются при необходимости)</th></tr>
<tr><th>Занятия лекционного типа</th><th>Занятия семинарского типа</th><th>Всего</th><th></th></tr>
<tr><td>1.МАТРИЦЫ, СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Системы линейных уравнений и определители 2,3 порядков. Системы линейных уравнений (общий случай). Алгоритм Гаусса. Главные и свободные неизвестные, общее решение неоднородной системы.</td><td>6</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Матрицы. Сложение матриц, умножение матрицы на число, свойства этих операций.</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Умножение матриц и его свойства. Обратная матрица. Транспонирование матриц.</td><td>5</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Определитель квадратной матрицы (формула полного разложения определителя). Свойства определителей. Разложение определителя по строке, столбцу. Фальшивое разложение. Способы вычисления определителей.</td><td>8</td><td>3</td><td>3</td><td>6</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Вычисление определителя матрицы с углом нулей. Элементарные матрицы. Определитель произведения двух квадратных матриц.</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Решение и исследование</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
</table>

квадратной системы линейных уравнений по правилу Крамера.					
Обратная матрица. Критерий существования и формула обратной матрицы. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований. Матричные уравнения вида AX = B, XA = B.	7	2	2	4	3 Аудиторная контрольная работа №1
2.ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ					
Векторы, линейные операции над ними. Базис, координаты вектора в базисе, запись операций над векторами в координатах. Разложение векторов по базису на прямой, плоскости и в пространстве.	3	1	1	2	1
Радиус-вектор точки. Декартова система координат. Полярная, сферическая и цилиндрическая системы координат*. Радиус-вектор точки, делящей отрезок в данном отношении.	3	1	1	2	1
Скалярное произведение двух векторов, его свойства и вычисление в координатах. Выражение ортогональной проекции одного вектора на другой.	3	1	1	2	1
Векторное произведение двух векторов, его свойства и выражение в координатах. Критерий коллинеарности двух векторов.	3	1	1	2	1
Смешанное произведение трех векторов, его свойства, выражение в координатах. Объем ориентированного параллелепипеда. Критерий компланарности трех векторов.	3	1	1	2	1
Прямая на плоскости. Векторное параметрическое и нормальное уравнения прямой. Уравнения прямой в координатах: каноническое, через две точки, общее, нормальное, с угловым коэффициентом. Вычисление угла между прямыми и расстояния от точки до прямой.	3	1	1	2	1
Прямая в пространстве. Векторное	3	1	1	2	1

параметрическое уравнение прямой. Координатные уравнения: параметрические, канонические, по двум точкам. Вычисление расстояния между параллельными и скрещивающимися прямыми.					
Плоскость в пространстве. Векторное параметрическое и нормальное уравнения плоскости, запись уравнения с помощью смешанного произведения. Координатные формы уравнения плоскости. Вычисление расстояния от точки до плоскости, угла между плоскостями.	6	2	2	4	2 Домашняя контрольная работа №2
3.ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ					
Линейное (векторное) пространство. Аксиомы, их простейшие следствия. Примеры. Базис, размерность, координаты вектора в базисе, запись операций над векторами в координатах. Матрица перехода от старого базиса к новому.	3	1	1	2	1
Арифметическое векторное пространство (столбцов или строк): его размерность, примеры базисов. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы.	5	2	2	4	1
Фундаментальная система решений и общее решение однородной и неоднородной системы линейных уравнений. Теорема Кронекера - Капелли и ее следствие.	3	1	1	2	1
Подпространства в линейном пространстве. Линейная оболочка конечного набора векторов и ее размерность. Задание подпространства системой линейных уравнений. Сумма и прямая сумма подпространств.	4	1	2	3	1
Линейные отображения и преобразования (операторы) линейных пространств, их матрицы. Ядро и образ (множество значений) линейного отображения.	3	1	1	2	1
Собственный вектор и собственное значение линейного	6	2	2	4	2

оператора и матрицы. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен квадратной матрицы.					
Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Матрица Грама. Ортонормированный базис. Ортогонализация. Ортогональная проекция на подпространство.	5	2	2	4	1
Билинейные функции, их матрицы. Билинейные и квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы.	4	1	2	3	1
Линейные операторы в евклидовом пространстве: самосопряженные и ортогональные, их свойства Приведение квадратичных форм к главным осям при помощи собственных значений.	5	1	2	3	2 Домашняя контрольная работа №3
*Точечно-векторное пространство. Связь между точками и векторами. Геометрическая интерпретация множества решений линейной неоднородной системы уравнений	1	1	0	1	0
*Линии второго порядка на плоскости, Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду. Эллипс, гипербола, парабола.	1	1	0	1	0
*Поверхности второго порядка в трехмерном пространстве, заданные каноническим уравнением. Эллипсоид, параболоиды, гиперболоиды. Цилиндрические поверхности и конус 2 порядка.	1	1	0	1	0
Текущая аттестация – *контрольная работа №1* Промежуточная аттестация – экзамен *(устный)*	6				*6 (количество часов, отведенных на итоговую аттестацию)*
Итого	108	36	36	72	36

Программа курса.

Раздел 1. МАТРИЦЫ, СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Тема 1. Системы линейных уравнений (общий случай). Алгоритм Гаусса. Главные и свободные неизвестные. Общее решение неоднородной системы.

Тема 2. Матрицы. Сложение матриц, умножение матрицы на число, свойства этих операций. Умножение матриц и его свойства. Обратная матрица. Транспонирование матриц.

Тема 3. Определитель квадратной матрицы. Формула полного разложения определителя Свойства определителей. Миноры, алгебраические дополнения, разложение определителя по строке и столбцу. Фальшивое разложение.. Способы вычисления определителей.

Тема 4. Вычисление определителя матрицы с углом нулей. Элементарные матрицы.Определитель произведения двух квадратных матриц.

Тема 5. Решение и исследование квадратной системы линейных уравнений по правилу Крамера.

Тема 6. Обратная матрица. Критерий существования и формула обратной матрицы. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований. Матричные уравнения $AX = B$, $XA = B$.

Раздел 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Тема 1. Векторы, линейные операции над ними. Базис, координаты вектора в базисе, запись операций над векторами в координатах. Разложение вектора по базису на прямой, плоскости и в пространстве.

Тема 2. Радиус-вектор точки. Декартова система координат. Полярная, сферическая и цилиндрическая системы координат. Радиус-вектор точки, делящей отрезок в данном отношении. Применения: середина отрезка, медиана треугольника, биссектриса треугольника.*

Тема 3. Скалярное произведение двух векторов, его свойства и вычисление в координатах. Выражение ортогональной проекции одного вектора на другой.

Тема 4. Векторное произведение двух векторов, его свойства и выражение в координатах. Критерий коллинеарности двух векторов.

Тема 5. Смешанное произведение трех векторов, его свойства, выражение в координатах. Объем ориентированного параллелепипеда. Критерий компланарности трех векторов.

Тема 6. Прямая на плоскости. Векторное параметрическое и нормальное уравнения прямой. Различные формы уравнения прямой в координатах: каноническое, через две точки, общее, нормальное, с угловым коэффициентом. Вычисление угла между прямыми и расстояния от точки до прямой.

Тема 7. Прямая в пространстве. Векторное параметрическое уравнение прямой. Координатные формы уравнений прямой: параметрические, канонические, по двум точкам. Вычисление расстояния между параллельными и скрещивающимися прямыми.

Тема 8. Плоскость в пространстве. Векторное параметрическое и нормальное уравнения плоскости, запись уравнения с помощью смешанного произведения. Координатные формы уравнения плоскости. Вычисление расстояния от точки до плоскости, угла между плоскостями. Задание прямой как линии пересечения двух плоскостей.

Раздел 3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Тема 1. Линейное (векторное) пространство. Аксиомы, их простейшие следствия. Примеры. Базис, размерность, координаты вектора в базисе, запись операций над векторами в координатах. Матрица перехода от старого базиса к новому.

Изменение координат вектора при изменении базиса.

Тема 2. Арифметическое векторное пространство (столбцов или строк): его размерность, примеры базисов. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы.

Вычисление ранга с помощью элементарных преобразований. Базисный минор. Вычисление ранга методом окаймления миноров. Критерий равенства определителя нулю.

Тема 3. Фундаментальная система решений и общее решение однородной и неоднородной системы линейных уравнений. Теорема Кронекера - Капелли и ее следствие.

Тема 4. Подпространства в линейном пространстве. Линейная оболочка конечного набора векторов и ее размерность. Задание подпространства системой линейных уравнений. Сумма и прямая сумма подпространств.

Тема 5. Линейные отображения и преобразования (операторы) линейных пространств. Ядро и образ (множество значений) линейного отображения. Матрица линейного оператора и ее изменение при замене базиса. Действия над линейными отображениями.

Тема 6. Собственный вектор и собственное значение линейного оператора и матрицы. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен квадратной матрицы. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду путем перехода к базису из собственных векторов.

Тема 7. Евклидово пространство (пространство со скалярным произведением). Неравенство Коши-Буняковского. Ортонормированный базис, разложение вектора по ортонормированному базису. Алгоритм ортогонализации (Грама-Шмидта). Ортогональная проекция вектора на подпространство, расстояние и угол между вектором и подпространством. Метод наименьших квадратов.*

*Тема 8. Билинейные функции, их матрицы. Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса. Симметрические билинейные и квадратичные формы.Приведение квадратичной формы к каноническому (нормальному) виду методом выделения квадратов (алгоритм Лагранжа). *Закон инерции квадратичных форм (формулировка). Положительно (отрицательно) определенные квадратичные форма, критерий Сильвестра.*

Тема 9. Линейные операторы в евклидовом пространстве: самосопряженные (симметрические) и ортогональные, их свойства и свойства их матриц. Основная теорема о самосопряженных операторах. Приведение квадратичных форм к диагональному виду (к главным осям) при помощи собственных значений и ортогональной замены

*Тема 10. *Точечно-векторное пространство. Связь между точками и векторами. Геометрическая интерпретация множества решений линейной неоднородной системы уравнений.*

*Задания для самостоятельной работы: *Точечно-векторное пространство. Связь между точками и векторами. Геометрическая интерпретация множества решений линейной неоднородной системы уравнений.*

**Тема 11. Линии второго порядка на плоскости, заданные каноническим уравнением. Приведение уравнения линии второго порядка на плоскости к каноническому виду. Эллипс, гипербола, парабола. Асимптоты гиперболы. Касательная к эллипсу, гиперболе, параболе.*

**Тема 12. Поверхности второго порядка в трехмерном пространстве, заданные каноническим уравнением. Эллипсоид, параболоиды, гиперболоиды. Цилиндрические поверхности и конус 2 порядка.*

Поверхности вращения. Упрощение уравнения поверхности (линии) второго порядка методом выделения квадратов и с помощью собственных векторов.

*Темы, или вопросы, помеченные звездочкой *, излагаются в ознакомительном плане.*

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине
7.1. Типовые контрольные задания для проведения текущего контроля успеваемости.

По разделу 1.

1. Исследуйте и решите систему при всех значениях параметра $\begin{cases} \alpha x + 3y = \alpha + 1 \\ (\alpha + 2)x + 9\alpha y = 6 \end{cases}$.
2. Выполните действия: $(3B)^2 - 2(BA^{-1} - E)^T$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Решите систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$
4. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

4(а) Решите неравенство $\begin{vmatrix} x^2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \le 14x$.

5. Найдите все решения системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 17 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$.
6. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

По разделу 2

7. В ортонормированном базисе даны векторы $\vec{a}\{1,4,1\}, \vec{b}\{2,1,3\}, \vec{c}\{-2,0,3\}$. Найти вектор $\vec{y},\ \vec{y} \perp \vec{a}, (\vec{y},\vec{c}) = 2, (\vec{y},\vec{b}) = 9$.
8. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $a = p + 3q, b = p - 2q$, если $|p| = 2, |q| = 3, \angle(p;q) = \pi/3$.
9. Даны вершины треугольника A(–5,3), B(7,8), C(–2,–1). (а) Составить уравнения прямых, на которых лежат медиана, биссектриса и высота треугольника, проведенные из вершины A. (б) Найти длины этих медианы, биссектрисы и высоты. (Система координат ортонормированная)
10. Доказать, что данные прямые $a: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{4}$ и $b: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+2}{4}$ принадлежат одной плоскости. Составить уравнение этой плоскости. Найти расстояние от точки A(3, -1, 2) до этой плоскости.
11. Найти точку M', симметричную точке $M(-1,2,0)$ относительно прямой $\dfrac{x+0,5}{1} = \dfrac{y+0,7}{-0,2} = \dfrac{z-2}{2}$.

11a. Найти точку M', симметричную точке $M(3,3,3)$ относительно плоскости $8x+6y+8z-25=0$.

12. Дана пирамида с вершинами $A(2,2,-3), B(3,1,1), C(-1,0,-5), D(4,-2,-3)$. Найти: (а) объем пирамиды; (б) длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC; (в) расстояние между прямыми AC и BD; (г) угол между плоскостью (ABC) и плоскостью, проходящей через вершину D и медиану AM грани ABD.

По разделу 3

13. Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 2 \\ 5x_1 - 8x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 12x_5 = 3 \end{cases}$

(представить его как сумму частного решения и линейной комбинации линейно независимых решений соответствующей однородной системы)

14. Найти ранг матрицы при всевозможных значениях параметра λ: $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & \lambda & -2 \\ -7 & -8 & 1 & \lambda-7 \end{pmatrix}$

15. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов $a_1=(1,-1,2,1)^T, a_2=(1,2,1,-1)^T, a_3=(0,3,-1,-2)^T, a_4=(3,3,4,-1)^T, a_5=(1,-4,3,3)^T$ в $\mathbb{R}^4$, выразить небазисные векторы через базисные.

16. Найти матрицу линейного отображения, переводящего векторы $a_1=(-2,1,-1)^T, a_2=(1,-1,3)^T, a_3=(1,2,-1)^T$ соответственно в векторы $b_1=(3,4)^T, b_2=(-2,1)^T, b_3=(1,5)^T$. Указать базисы и размерности ядра и образа (ранг) этого отображения.

17. Составить систему однородных линейных уравнений, задающую линейную оболочку векторов $a_1=(1,-1,2,0)^T, a_2=(-1,0,1,2)^T, a_3=(1,-1,3,-1)^T$

18. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств V_1, V_2 в $\mathbf{R}^4$, где $V_1=\langle a_1,a_2,a_3\rangle, a_1=(1,0,-3,-2)^t, a_2=(7,1,9,14)^t, a_3=(-4,1,2,-9)^t$, а $V_2=\langle b_1,b_2\rangle$, $b_1=(10,1,0,8)^T, b_2=(-3,0,1,-3)^T$.

19. Доказать, что пространство R^4 является прямой суммой подпространств $L_1=\langle a_1\rangle, L_2=\langle a_2,a_3,a_4\rangle$, и разложить вектор $x=(3,0,-2,-1)^T$ в сумму проекций на эти подпространства, где $a_1=(-3,-2,3,-1)^T, a_2=(-1,-3,2,3)^T, a_3=(-1,-2,1,-3)^T, a_4=(2,3,-2,-2)^T$.

20. Найти базис из собственных векторов линейного оператора, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, и записать матрицу этого оператора в найденном базисе.

21. В евклидовом пространстве R^4 (со стандартным скалярным произведением) дано подпространство $L=\langle a_1=(1,-1,1,1)^T, a_2=(1,4,-1,0)^T\rangle$. Разложить вектор $x=(2,1,-2,0)^T$ в

сумму ортогональной проекции на L и ортогональной составляющей. Найти угол между вектором и подпространством, расстояние от конца вектора до подпространства.

22. Построить при помощи процесса ортогонализации ортонормированный базис линейной оболочки векторов $a_1=(1,2,1)^T, a_2=(3,4,1)^T, a_3=(1,-3,-1)^T$.
23. Найти ортонормированный базис из собственных векторов линейного оператора, заданного в ортонормированном базисе матрицей $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$, и записать матрицу этого оператора в найденном базисе.
24. Привести квадратичную форму $k=x_1^2-6x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+5x_3^2$:

(а) к каноническому виду методом Лагранжа, определить ее ранг и индексы инерции; (б) к главным осям (диагональному виду) посредством ортогональной замены координат.

24а. То же для квадратичной формы $k=x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$.

25. Исследовать квадратичную форму на положительную и отрицательную определенность в зависимости от параметра α: $k=(\alpha-1)x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3+(\alpha+2)x_2^2-4x_2x_3+(\alpha-1)x_3^2$.

7.2. Типовые материалы для проведения промежуточной аттестации.

Типовые задачи для подготовки к экзамену

1. Даны вершины треугольника A(–5,3), B(7,8), C(–2,–1). Составить уравнения медианы, биссектрисы и высоты треугольника, проведенных из вершины A. (Система координат ортонормированная)

2. Даны точки $E(2,1,0), F(0,2,1), G(1,2,0), H(1,0,-2)$. Найти: (а) объем пирамиды EFGH; (б) длину высоты, проведенной из вершины H, в) расстояние между прямыми (EF) и (GH).

3. Точки A(1,-2,3), B(3,2,1), C(6,4,4) – вершины параллелограмма. Определите координаты его четвертой вершины (найдите все решения).(D_1(4,0,6), D_2(8,8,2), D_3(–2,–4,0)).

4. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M(1,0,3) и перпендикулярной к плоскостям $x+y+z-8=0,\ 2x-y+4z+5=0$.

5. Докажите, что прямые $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{4}, \frac{x+5}{2}=\frac{y+8}{3}=\frac{z-4}{-1}$ пересекаются, и составьте уравнение содержащей их плоскости.

6. Точка A лежит на прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{1}$ и удалена от плоскости $x+y+z+3=0$ на расстояние $\sqrt{3}$. Найдите координаты точки A.

7. а) Найдите угол между плоскостью $4x+4y-7z+1=0$ и прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-6}$; б) составьте уравнение плоскости, содержащей данную прямую и перпендикулярной данной плоскости; в) уравнения ортогональной проекции данной прямой на данную плоскость.

8. Составьте параметрические и канонические уравнения прямой, по которой пересекаются плоскости $x-y+2z-1=0,\ 3x-y+2z+2=0$.

9. Даны прямые $a:\begin{cases} x=5+t \\ y=3-t \\ z=13+t \end{cases}$ и $b:\begin{cases} x=6+t \\ y=1+2t \\ z=10-t \end{cases}$. а) найдите угол между a и b; б) вычислите расстояние между a и b.

10. Найдите матрицу X, удовлетворяющую уравнению $AXB^{-1}=C$,

где $A=\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}, B=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{Vmatrix}, C=\begin{Vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \end{Vmatrix}$.

11. Найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & \lambda & 4 & -2 \\ 1+\lambda & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ в зависимости от параметра λ.

12. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей а) $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, б) $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$, в) $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ (при всевозможных значениях параметра). Если возможно, приведите ее к диагональному виду (нужно указать диагональный вид и базис, в котором матрица имеет такой вид).

13. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Можно ли из них выбрать базис? Если да, указать такой базис и записать в нем матрицу оператора.

14. .Решите неравенство $\begin{vmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & x+4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2x & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}<0$.

15. Найдите обратную для матрицы $A=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ -5 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

16. Определить, при каких значениях параметра система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+3x_5=-1 \\ 3x_1-8x_2+x_3+2x_4=-2 \\ 2x_1-5x_2-3x_3+2x_4-3x_5=-1 \\ 6x_1-16x_2+2x_3+4x_4=\alpha \end{cases}$$

совместна, и найти ее общее решение (представить решение как сумму частного решения и линейной комбинации фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы).

17. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов $a_1 = (1,-1,2,1)^T, a_2 = (1,2,1,-1)^T, a_3 = (0,3,-1,-2)^T, a_4 = (3,3,4,-1)^T$ в $\mathbb{R}^4$ и выражение остальных векторов через базисные.

18. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств V_1, V_2 в $\mathbf{R^4}$, где $V_1 = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, a_1 = (1,0,-3,-2)^t, a_2 = (7,1,9,14)^t, a_3 = (-4,1,2,-9)^t$, а $V_2 = \langle b_1, b_2 \rangle$, $b_1 = (10,1,0,8)^T, b_2 = (-3,0,1,-3)^T$.

19. В базисе e_1, e_2 линейный оператор f имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $e_1' = e_1 - 2e_2, e_2' = 2e_1 + e_2$.

20. Найти матрицу линейного отображения, переводящего векторы $a_1 = (-2,1,-1)^T, a_2 = (1,-1,3)^T, a_3 = (1,2,-1)^T$ соответственно в векторы $b_1 = (3,4)^T, b_2 = (-2,1)^T, b_3 = (1,5)^T$.Определить размерности и базисы ядра и образа этого отображения.

21. Вычислить матрицу перехода $C_{e \to e'}$ от базиса $e_1 = (-2,1,-1)^T, e_2 = (1,-1,3)^T, e_3 = (1,2,-1)^T$ к базису $e_1' = (-1,2,3)^T, e_2' = (2,1,2)^T, e_3' = (0,2,1)^T$ в линейном пространстве $\mathbf{R^3}$ и определить координаты вектора $x = -e_1' + 3e_2' - e_3'$ в базисе e_1, e_2, e_3.

22. Линейный оператор на двумерной плоскости векторов (приложенных в начале координат) $\mathbb{R}^2$ переводит любой вектор в его ортогональную проекцию на прямую $x + 2y = 0$. Запишите его матрицу в данном ортонормированном базисе, найдите собственные значения и собственные векторы.

23. Привести квадратичную форму: а) $k = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2^2 + 8x_2x_3 - 2x_3^2$;
б) $k = x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ к каноническому (нормальному) виду методом Лагранжа, определить ее ранг и индексы инерции.

24. Исследовать квадратичную форму на положительную и отрицательную определенность в зависимости от параметра α : $k = \alpha x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + \alpha x_2^2 + 4x_2x_3 + \alpha x_3^2$.

25. Построить при помощи процесса ортогонализации (и нормирования) ортонормированный базис линейной оболочки векторов $a_1 = (1,-1,2,1)^T, a_2 = (2,-1,1,2)^T, a_3 = (2,4,-3,1)^T$ (стандартный базис ортонормированный).

26. Найти ортонормированный базис из собственных векторов линейного оператора, заданного в ортонормированном базисе матрицей:

а) $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$, б) $B=\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$; записать диагональную матрицу оператора в найденном базисе.

27. Доказать, что пространство R^4 является прямой суммой подпространств $L_1=\langle a_1\rangle, L_2=\langle a_2,a_3,a_4\rangle$, и разложить вектор $x=(3,0,-2,-1)^T$ в сумму проекций на эти подпространства, где $a_1=(-3,-2,3,-1)^T, a_2=(-1,-3,2,3)^T, a_3=(-1,-2,1,-3)^T, a_4=(2,3,-2,-2)^T$.
28. В евклидовом пространстве R^4 (со стандартным скалярным произведением) дано подпространство $L=\langle a_1=(1,-1,1,1)^T, a_2=(1,4,-1,0)^T\rangle$. Разложить вектор $x=(2,1,-2,0)^T$ на сумму ортогональной проекции на L и ортогональной составляющей; найти расстояние от вектора x до L и угол между x и L.

Шкала и критерии оценивания результатов обучения по дисциплине.

Результаты обучения	«Неудовлетворительно»	«Удовлетворительно»	«Хорошо»	«Отлично»
Знания: - точных формулировок основных понятий, относящихся к теории матриц и определителей, абстрактной алгебре, аналитической геометрии, линейной алгебре; - основных теорем о системах линейных уравнений, матрицах и определителях, прямых и плоскостях, линейных пространствах, линейных операторах, квадратичных формах, евклидовых пространствах, простейшие теоремы о группах, кольцах и полях	Знания отсутствуют	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения: - решать системы линейных уравнений при помощи алгоритма	Умения отсутствуют	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение	Успешное и систематическое умение

Гаусса, вычислять ранги матриц, определители матриц, выполнять операции над матрицами; - решать стандартные задачи векторной алгебры, геометрии прямых и плоскостей; - находить базисы конечномерных линейных пространств и подпространств, координаты векторов, решать задачи о линейных операторах и собственных векторах при помощи матриц, простейшие задачи геометрии евклидовых пространств, исследовать квадратичные формы			(допускает неточности непринципиальн ого характера)	
Владения: - методами теории матриц, линейной алгебры, аналитической геометрии, основными алгоритмами: алгоритмом Гаусса и базирующимися на нем алгоритмами решения матричных задач и задач линейной алгебры, алгоритмом Лагранжа и пр	Навыки владения отсутствуют	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированн ые навыки (владения), применяемые при решении задач

8. Ресурсное обеспечение:

- Перечень основной и дополнительной литературы:

  Основная:

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - С-пб: Лань, 2016 – 2018.
2. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. - С-пб: Лань, 2008 – 2018.
3. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. - Москва: МГУ, 2005
4. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч.1. Основы алгебры. Ч.II. Линейная алгебра. - Москва: МГУ, 2000 – 2005, МЦНМО, 2009.
5. Сборник задач по алгебре под редакцией А.И. Кострикина. М.: Физматлит или МЦНМО, 2009.

Дополнительная:

6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - Москва: Наука,
7. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. - Москва: Физматлит, 2003
8. Умнов А.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. - Москва: МФТИ, 2006
9. Кряквин В.Д. Линейная алгебра в задачах и упражнениях. – Москва: Вузовский учебник, 2006.
10. Шевцов Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты. - Москва: Финансы и статистика, 2003

- Электронная библиотека МГУ http://www.nbmgu.ru/publicdb/
- Описание материально-технического обеспечения: лекции семинарские занятия проводятся в обычной аудитории.