

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2013 года

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 3. Один из его корней равен $4/3$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = -2$.

2. Вычислите $\log_{12} 3 \cdot \log_9 12$.

3. Решите неравенство

$$12\left(3 + 3^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(3^{1+2x} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \geq 4 \cdot 3^{\frac{x}{2}}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin 3x} + \frac{\cos x}{\cos 3x}.$$

5. В 14:00 из села Верхнее вниз по течению реки в сторону села Нижнее отправился катер "Быстрый". Когда до Нижнего оставалось плыть 500 метров, ему навстречу из Нижнего вышел катер "Смелый". В этот же самый момент "Быстрый", не желая встречи со "Смелым", развернулся и пошел обратно к Верхнему. В 14:14, когда расстояние по реке от "Быстрого" до Верхнего сравнялось с расстоянием по реке от "Смелого" до "Быстрого", на "Смелом" осознали, что они идут с "Быстрым" на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно к Нижнему. В исходные пункты катера вернулись одновременно в 14:18. Найдите расстояние по реке между Верхним и Нижним, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $KLMN$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r , причем $R = \frac{3}{2}r$. Найдите среднюю линию трапеции, если диагональ KM равна 3.

7. В основании прямой призмы $KLMK'L'M'$ лежит прямоугольный треугольник KLM , такой что $KM = LM = 1$. На ребре $K'L'$ верхнего основания (параллельном KL) отмечена точка N , так что $K'N : NL' = 1 : 3$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $KLM'N$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sin(x - a \ln|x|) = x + 1$$

имеет бесконечно много решений.

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2013 года

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен -2 . Один из его корней равен $3/2$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 1$.

2. Вычислите $\log_8 10 \cdot \log_{10} 4$.

3. Решите неравенство

$$9\left(1 + 5^{1-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(5^{2x} + 5\right)^{\frac{1}{2}} \geq 6^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\cos 4x}{\sin 3x} - \frac{\sin 4x}{\cos 3x} = \frac{\sin 3x}{\cos 4x} - \frac{\cos 3x}{\sin 4x}.$$

5. От биостанции до границы заповедника вверх по реке ровно 14 км. В 7:00 браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. Через некоторое время им навстречу с биостанции вышел катер рыбинспекции. Браконьеры тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. В 7:38, когда браконьеры оказались ровно посередине между рыбинспекторами и границей, рыбинспекторы осознали, что они идут с браконьерами на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно на биостанцию. До биостанции они добрались ровно в тот момент, когда браконьеры выехали за пределы заповедника — в 7:50. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры и рыбинспекторы, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r . Найдите r , если $R = 12$, а косинус угла между диагональю AC и основанием AD равен $3/4$.

7. В основании прямой призмы $KLMK'L'M'$ лежит прямоугольный треугольник KLM , такой что $KM = LM = 1$. На ребре $K'M'$ верхнего основания (параллельном KM) отмечена точка N , так что $K'N : NM' = 3 : 1$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $KL'MN$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\cos\left(x - \frac{a}{x}\right) = x - 1$$

имеет бесконечно много решений.

